

Le lemme fondamental pour les groupes unitaires

By GÉRARD LAUMON and BAO CHÂU NGÔ

Abstract

Let G be an unramified reductive group over a nonarchimedean local field F . The so-called *Langlands Fundamental Lemma* is a family of conjectural identities between orbital integrals for $G(F)$ and orbital integrals for endoscopic groups of G . In this paper we prove the Langlands fundamental lemma in the particular case where F is a finite extension of $\mathbb{F}_p((t))$, G is a unitary group and $p > \text{rank}(G)$. Waldspurger has shown that this particular case implies the Langlands fundamental lemma for unitary groups of rank $< p$ when F is any finite extension of \mathbb{Q}_p .

We follow in part a strategy initiated by Goresky, Kottwitz and MacPherson. Our main new tool is a deformation of orbital integrals which is constructed with the help of the Hitchin fibration for unitary groups over projective curves.

0. Introduction

0.1. *Le lemme fondamental de Langlands et Shelstad.* Soient F un corps local nonarchimédien de caractéristique résiduelle différente de 2, F' «son» extension quadratique non ramifiée et τ l'élément non trivial du groupe de Galois de F' sur F . On considère le groupe unitaire quasi-déployé $G = \text{U}(n)$ sur F dont le groupe des points rationnels sur F est

$$G(F) = \{g \in \text{GL}(n, F') \mid \tau^*({}^t g)\Phi_n g = \Phi_n\}$$

où la matrice Φ_n a pour seules entrées non nulles les $(\Phi_n)_{i, n+1-i} = 1$.

Soient $n = n_1 + n_2$ une partition non triviale et $H = \text{U}(n_1) \times \text{U}(n_2)$ le groupe endoscopique de G correspondant.

Soient $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ un élément semi-simple, régulier et elliptique de $H(F)$ et $T = T_1 \times T_2 \subset \text{U}(n_1) \times \text{U}(n_2) = H$ son centralisateur; T_1 et T_2 sont des tores maximaux de $\text{U}(n_1)$ et $\text{U}(n_2)$ qui sont anisotropes sur F . Fixons un plongement de T comme tore maximal dans G et notons γ l'image de δ par ce

plongement. Supposons que l'élément semi-simple et elliptique γ est régulier dans G .

L'ensemble des classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable de γ dans $G(F)$ est en bijection naturelle $\lambda \mapsto \gamma^\lambda$ avec le groupe fini $\Lambda = \Lambda_r = \{\lambda \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \mid \lambda_1 + \dots + \lambda_r = 0\}$ où r est le rang du F' -tore déployé maximal contenu dans le centralisateur de γ dans $\text{GL}(n, F')$. De même l'ensemble des classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable de δ dans $H(F)$ est en bijection naturelle $\lambda \mapsto \delta^\lambda = (\delta_1^{\lambda_1}, \delta_2^{\lambda_2})$ avec le sous-groupe $\Lambda^H = \Lambda_{r_1} \times \Lambda_{r_2}$ de Λ où r_1 et r_2 sont les rangs des F' -tores déployés maximaux contenus dans les centralisateurs de δ_1 dans $\text{GL}(n_1, F')$ et δ_2 dans $\text{GL}(n_2, F')$. On a bien sûr $r = r_1 + r_2$. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, le centralisateur T^λ de γ^λ est une forme intérieure de T et est donc isomorphe à T . De même, pour chaque $\lambda \in \Lambda_H \subset \Lambda$, le centralisateur S^λ de δ^λ est une forme intérieure de T et est donc lui aussi isomorphe à T .

Notons $\mathcal{O}_{F'}$ l'anneau des entiers de F' . Soient $K = K_n = G(F) \cap \text{GL}(n, \mathcal{O}_{F'})$ et $K^H = K_{n_1} \times K_{n_2}$ les sous-groupes maximaux standard de $G(F)$ et $H(F)$. On normalise les mesures de Haar dg et dh de $G(F)$ et $H(F)$ en demandant que K et K^H soient de volume 1. On considère les intégrales orbitales

$$O_{\gamma^\lambda}(1_K) = \int_{T^\lambda(F) \backslash G(F)} 1_K(g^{-1}\gamma^\lambda g) \frac{dg}{dt^\lambda}$$

pour $\lambda \in \Lambda$ et

$$O_{\delta^\lambda}^H(1_{K^H}) = \int_{S^\lambda(F) \backslash H(F)} 1_{K^H}(h^{-1}\delta^\lambda h) \frac{dh}{ds^\lambda}$$

pour $\lambda \in \Lambda^H$. On a fixé une mesure de Haar sur $T(F)$, par exemple celle qui donne le volume 1 au sous-groupe compact maximal, et on a transporté, par les isomorphismes entre T^λ et T et entre S^λ et T signalés plus haut, cette mesure en la mesure de Haar dt^λ sur $T^\lambda(F)$ pour chaque $\lambda \in \Lambda$ et en la mesure de Haar ds^λ sur $S^\lambda(F)$ pour chaque $\lambda \in \Lambda^H$.

Soit $\kappa : \Lambda \rightarrow \{\pm 1\}$ le caractère dont le noyau est exactement Λ_H . On forme suivant Langlands et Shelstad (cf. [La-Sh]) les combinaisons linéaires d'intégrales orbitales suivantes: la κ -intégrale orbitale

$$O_\gamma^\kappa(1_K) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \kappa(\lambda) O_{\gamma^\lambda}(1_K)$$

et l'intégrale orbitale stable endoscopique

$$SO_\delta^H(1_{K^H}) = \sum_{\lambda \in \Lambda^H} O_{\delta^\lambda}^H(1_{K^H}).$$

Langlands et Shelstad (cf. [La-Sh]) ont défini un *facteur de transfert* $\Delta(\gamma, \delta)$, qui est le produit d'un signe et de la puissance

$$|D_{G/H}(\gamma)|^{\frac{1}{2}}$$

du nombre d'éléments du corps résiduel de F , et ils ont conjecturé:

LEMME FONDAMENTAL. *On a l'identité*

$$O_{\gamma}^{\kappa}(1_K) = \Delta(\gamma, \delta) \mathrm{SO}_{\delta}^H(1_{K^H}).$$

Waldspurger a démontré que pour établir cette conjecture pour F une extension finie de \mathbb{Q}_p , il suffisait de le faire lorsque F est une extension finie de $\mathbb{F}_p((t))$ (cf. [Wal 1]), et ce après avoir remplacé les groupes G et H par leurs algèbres de Lie (cf. [Hal], [Wal 2], [Wal 3]).

L'objet de cet article est de terminer la démonstration du lemme fondamental pour les groupes unitaires de rang $n < p$ en traitant ce dernier cas: voir le théorème 1.5.1 pour l'énoncé précis.

0.2. *Notre stratégie.* Dans la preuve présentée ici, nous utilisons des idées de Goresky, Kottwitz et MacPherson, et du premier auteur, idées qui ont été introduites dans les travaux antérieurs [G-K-M] et [Lau]. Comme dans [G-K-M] on exprime le facteur de transfert à l'aide d'une flèche en cohomologie équivariante de sorte que le lemme fondamental se déduit d'un isomorphisme en cohomologie équivariante. Comme dans [Lau] on utilise un argument de déformation, qui fait «glisser» d'une situation d'intersection très compliquée vers une situation d'intersection transversale.

Les résultats de [G-K-M] dans le cas non ramifié pour un groupe réductif quelconque, et de [Lau] dans le cas éventuellement ramifié, mais pour le groupe unitaire uniquement, supposent démontrée une conjecture de pureté des fibres de Springer. Une telle conjecture a été formulée par Goresky, Kottwitz et MacPherson.

Nous ne savons pas démontrer cette conjecture, mais nous contournons le problème en démontrant en fait un autre énoncé de pureté, à savoir la pureté d'un faisceau pervers lié à une famille «universelle» de κ -intégrales orbitales globales. Pour cela nous nous fondons sur une interprétation géométrique de la théorie de l'endoscopie de Langlands et Kottwitz (cf. [Lan] et [Kot 1]) à l'aide de la fibration de Hitchin ([Hit]). Cette interprétation, découverte par le second auteur et présentée ici uniquement dans le cas des groupes unitaires, vaut en fait en toute généralité (cf. [Ngo]). Enfin, un argument dans l'esprit de ([Lau]) permet de conclure.

0.3. *Plan de l'article.* Passons brièvement en revue l'organisation de cet article. Dans le chapitre 1, nous explicitons l'énoncé du lemme fondamental pour les groupes unitaires, en termes de comptage des réseaux qui sont auto-duaux par rapport à une forme hermitienne et qui sont stables par une transformation unitaire.

Dans le chapitre 2, nous explicitons la construction de la fibration de Hitchin dans le cas du groupe unitaire. Nous faisons le lien entre la fibration Hitchin d'un groupe unitaire et la fibration de Hitchin d'un de ces groupes endoscopiques.

Dans le chapitre 3, le cœur de ce travail, nous démontrons une identité globale, que l'on devrait pouvoir identifier à une identité globale qui apparaît dans la stabilisation de la formule des traces. L'énoncé principal de ce chapitre est le théorème 3.9.3. On le démontre à l'aide d'un isomorphisme en cohomologie équivariante. Comme nous l'avons mentionné plus haut, l'isomorphisme en cohomologie équivariante que nous construisons est analogue à celui construit antérieurement dans [G-K-M]. Comme nous l'avons déjà dit notre construction s'appuie sur un énoncé de pureté, démontré dans le paragraphe 3.2, et d'un argument de déformation.

Dans le chapitre 4, nous expliquons comment passer d'une situation locale donnée, à une situation globale du type de celle considérée dans le chapitre 3. Ici, l'outil de base est un théorème de Bertini rationnel 4.4.1, démontré par Gabber ([Gab]) et Poonen ([Poo]). Le comptage de la section (4.6) est analogue à celui du théorème (15.8) de [G-K-M].

Enfin, dans un appendice, nous démontrons une variante A.1.2 du théorème de localisation d'Atiyah-Borel-Segal. Puis nous présentons le calcul de la cohomologie équivariante d'un fibré en droites projective et d'un fibré en droites projectives pincées. Nous démontrons dans le dernier appendice une formule de points fixes.

0.4. *Précautions d'emploi de nos résultats.* Dans ce travail nous avons admis certains résultats sur la cohomologie ℓ -adique des champs algébriques.

0.5. *Remerciements.* Nous remercions A. Abbes, J.-B. Bost, L. Breen, M. Brion, J.-F. Dat, O. Gabber, D. Gaitsgory, A. Genestier, L. Illusie, S. Kleiman, L. Lafforgue, F. Loeser, M. Raynaud et J.-L. Waldspurger pour l'aide qu'ils nous ont apportée durant la préparation de ce travail. Nous remercions aussi le rapporteur pour sa lecture attentive de notre texte et les nombreuses améliorations qu'il y a apportées.

1. Intégrales orbitales et comptage de réseaux

1.1. *Les données.* Pour tout corps local nonarchimédien K on note \mathcal{O}_K son anneau des entiers, ϖ_K une uniformisante de K et $v_K : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ la valuation discrète normalisée par $v_K(\varpi_K) = 1$.

Pour toute extension finie L de K , on note $\mathrm{Tr}_{L/K} : L \rightarrow K$ et $\mathrm{Nr}_{L/K} : L^\times \rightarrow K^\times$ les trace et norme correspondantes.

Soient F un corps local nonarchimédien d'égalité caractéristiques différentes de 2, $k = \mathbb{F}_q$ son corps résiduel et F' son extension quadratique non ramifiée de F (de corps résiduel \mathbb{F}_{q^2}).

On se donne une famille finie $(E_i)_{i \in I}$ d'extensions finies séparables de F qui sont toutes disjointes de F' et, pour chaque $i \in I$, un élément γ_i de l'extension composée $E'_i = E_i F'$. On note n_i le degré de E_i sur F et τ l'élément non trivial des groupes de Galois

$$\text{Gal}(F'/F) \cong \text{Gal}(E'_i/E_i).$$

On suppose que, pour chaque $i \in I$, γ_i engendre E'_i sur F' , $\gamma_i \in \mathcal{O}_{E'_i}$ et

$$\gamma_i^\tau + \gamma_i = 0.$$

On suppose de plus que pour tous $i \neq j$ dans I les polynômes minimaux $P_i(T)$ et $P_j(T)$ sur F' de γ_i et γ_j sont premiers entres eux. On suppose enfin que la caractéristique de k est $> n = \sum_{i \in I} n_i$.

Le tore T de l'introduction est alors le tore anisotrope sur F dont le groupe des F -points est

$$T(F) = \prod_{i \in I} \{x \in E'_i \mid x^\tau x = 1\}$$

et γ est vu comme un point sur F de l'algèbre de Lie de ce tore.

1.2. *Invariants numériques.* Pour chaque $i \in I$, le polynôme minimal $P_i(T)$ de $\gamma_i \in \mathcal{O}_{E'_i}$ sur F' est un polynôme unitaire de degré n_i à coefficients dans $\mathcal{O}_{F'}$. Comme $\gamma_i^\tau = -\gamma_i$, on a de plus $P_i^\tau(T) = (-1)^{n_i} P_i(-T)$.

On note δ_i la dimension sur \mathbb{F}_{q^2} de $\mathcal{O}_{E'_i}/\mathcal{O}_{F'}[\gamma_i]$, c'est-à-dire la co-longueur de $\mathcal{O}_{F'}[\gamma_i]$ comme sous- $\mathcal{O}_{F'}$ -réseau de $\mathcal{O}_{E'_i}$. D'après Gorenstein et Rosenlicht (cf. [Al-Kl 1, Ch. 8 Prop. 1.16]), le conducteur $\mathfrak{a}_i \subset \mathcal{O}_{F'}[\gamma_i] \subset \mathcal{O}_{E'_i}$ de $\mathcal{O}_{E'_i}$ dans $\mathcal{O}_{F'}[\gamma_i]$ est de co-longueur δ_i comme sous- $\mathcal{O}_{F'}$ -réseau de $\mathcal{O}_{F'}[\gamma_i]$ et est donc égal à

$$\mathfrak{a}_i = \varpi_{E'_i}^{\frac{2\delta_i e_i}{n_i}} \mathcal{O}_{E'_i}$$

où e_i est l'indice de ramification de E_i sur F .

Puisque l'extension E_i/F est de degré $n_i < p$, *a fortiori* premier à p , la différentielle $\mathfrak{D}_{E_i/F}$ est égale à l'idéal $\varpi_{E_i}^{e_i-1} \mathcal{O}_{E_i}$ de \mathcal{O}_{E_i} d'après la proposition 13, §6, ch. III, de [Ser]. De même, la différentielle $\mathfrak{D}_{E'_i/F'}$ est égale à l'idéal $\varpi_{E'_i}^{e_i-1} \mathcal{O}_{E'_i}$ de $\mathcal{O}_{E'_i}$. En utilisant loc. cit. Cor. 1, on a donc

$$v_{E'_i} \left(\frac{dP_i}{dT}(\gamma_i) \right) = \frac{2\delta_i e_i}{n_i} + e_i - 1.$$

Pour tous $i \neq j$ dans I , le résultant $\text{Res}(P_i, P_j) \in F'$ est non nul puisque les polynômes $P_i(T)$ et $P_j(T)$ sont premiers entre eux. C'est donc un élément non nul de $\mathcal{O}_{F'}$. On a de plus $\text{Res}(P_i, P_j)^\tau = (-1)^{n_i n_j} \text{Res}(P_i, P_j)$. La valuation $r_{ij} \geq 0$ de $\text{Res}(P_i, P_j)$ est égale à

$$r_{ij} = \frac{n_i v_{E'_i}(P_j(\gamma_i))}{e_i} = \frac{n_j v_{E'_j}(P_i(\gamma_j))}{e_j}.$$

Elle est aussi égale à la co-longueur du $\mathcal{O}_{F'}$ -réseau $\mathcal{O}_{F'}[\gamma_i \oplus \gamma_j] \subset E'_i \oplus E'_j$ comme sous-réseau de $\mathcal{O}_{F'}[\gamma_i] \oplus \mathcal{O}_{F'}[\gamma_j] \subset E'_i \oplus E'_j$. De plus, on a

$$P_j(\gamma_i)\mathcal{O}_{F'}[\gamma_i] \oplus P_i(\gamma_j)\mathcal{O}_{F'}[\gamma_j] \subset \mathcal{O}_{F'}[\gamma_i \oplus \gamma_j] \subset \mathcal{O}_{F'}[\gamma_i] \oplus \mathcal{O}_{F'}[\gamma_j]$$

puisque $P_i(\gamma_i \oplus \gamma_j) = 0 \oplus P_i(\gamma_j)$ et $P_j(\gamma_i \oplus \gamma_j) = P_j(\gamma_i) \oplus 0$, et l'indice de $P_j(\gamma_i)\mathcal{O}_{F'}[\gamma_i] \oplus P_i(\gamma_j)\mathcal{O}_{F'}[\gamma_j]$ dans $\mathcal{O}_{F'}[\gamma_i \oplus \gamma_j]$ est aussi égal à r_{ij} .

Pour toute partie J de I on note $E_J = \bigoplus_{i \in J} E_i$ et $E'_J = \bigoplus_{i \in J} E'_i$. Ce sont des espaces vectoriels de dimension $n_J = \sum_{i \in J} n_i$ sur F et F' respectivement. On note aussi $\mathcal{O}_{E_J} = \bigoplus_{i \in J} \mathcal{O}_{E_i}$ et $\mathcal{O}_{E'_J} = \bigoplus_{i \in J} \mathcal{O}_{E'_i}$. Soit $\gamma_J \in \mathcal{O}_{E'_J}$ l'élément $\gamma_J = \bigoplus_{i \in J} \gamma_i$. La sous- $\mathcal{O}_{F'}$ -algèbre $\mathcal{O}_{F'}[\gamma_J]$ de $\mathcal{O}_{E'_J}$ est de co-longueur

$$\delta_J = \sum_{i \in J} \delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j \in J} r_{ij}$$

dans $\mathcal{O}_{E'_J}$.

Soit $\mathfrak{a}_J \subset \mathcal{O}_{F'}[\gamma_J] \subset \mathcal{O}_{E'_J}$ le conducteur de $\mathcal{O}_{E'_J}$ dans $\mathcal{O}_{F'}[\gamma_J]$. D'après Gorenstein, \mathfrak{a}_J est de co-longueur δ_J dans $\mathcal{O}_{F'}[\gamma_J]$ et est égal à

$$\mathfrak{a}_J = \varpi_{E'_J}^{\underline{a}_J} \mathcal{O}_{E'_J}$$

où $\underline{a}_J = (a_i)_{i \in J}$ est la famille des entiers

$$a_i = \frac{\left(2\delta_i + \sum_{j \in J - \{i\}} r_{ij}\right) e_i}{n_i}$$

et où on a posé $\varpi_{E'_J}^{\underline{a}_J} = \bigoplus_{i \in J} \varpi_{E'_i}^{a_i}$.

1.3. *Formes hermitiennes.* On rappelle que le groupe $F^\times / \text{Nr}_{F'/F}(F'^\times)$ est le groupe à deux éléments engendré par la classe de n'importe quelle uniformisante ϖ_F de F . On l'identifie à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans la suite.

Pour chaque $i \in I$ et chaque $c_i \in E_i^\times$, on munit le F' -espace vectoriel E'_i de la forme hermitienne

$$\Phi_{i,c_i} : E'_i \times E'_i \rightarrow F', (x, y) \mapsto \text{Tr}_{E'_i/F'}(c_i x^\tau y).$$

Si $\mathfrak{d}_{E_i/F}$ est le discriminant de E_i/F , c'est-à-dire l'idéal

$$\mathfrak{d}_{E_i/F} = \text{Nr}_{E_i/F}(\mathfrak{D}_{E_i/F})$$

de \mathcal{O}_F , le discriminant de Φ_{c_i} est la classe $\lambda_i(c_i) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de l'élément

$$\text{Nr}_{E_i/F}(c_i)x \in F^\times$$

dans $F^\times / \text{Nr}_{F'/F}(F'^\times)$ pour n'importe quel générateur x de l'idéal $\mathfrak{d}_{E_i/F}$. Comme n_i est premier à la caractéristique résiduelle par hypothèse, on a

$$\mathfrak{d}_{E_i/F} = \varpi_F^{\frac{n_i e_i - 1}{e_i}} \mathcal{O}_F$$

et

$$\lambda_i(c_i) \equiv v_F(\mathrm{Nr}_{E_i/F}(c_i)) + n_i - \frac{n_i}{e_i} = \frac{n_i v_{E_i}(c_i)}{e_i} + n_i - \frac{n_i}{e_i} \pmod{2}.$$

Plus généralement, pour chaque partie J de I et chaque $c_J = (c_i)_{i \in J} \in E_J^\times$, on munit le F' -espace vectoriel E'_J de la forme hermitienne

$$\Phi_{J,c_J} = \bigoplus_{i \in J} \Phi_{i,c_i} : E'_J \times E'_J \rightarrow F'.$$

Le discriminant de Φ_{J,c_J} est la somme

$$\sum_{i \in J} \lambda_i(c_i) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

des discriminants des Φ_{i,c_i} .

1.4. *Réseaux auto-duaux.* Pour chaque partie J de I et chaque $c_J \in E_J^\times$, on considère l'ensemble

$$\{M_J \subset E'_J \mid M_J^{\perp c_J} = M_J \text{ et } \gamma_J M_J \subset M_J\}$$

des $\mathcal{O}_{F'}$ -réseaux M_J de E'_J qui sont à la fois auto-duaux pour Φ_{J,c_J} et stables par γ_J . Ici on a noté

$$M_J^{\perp c_J} = \{x \in E'_J \mid \Phi_{J,c_J}(x, M_J) \subset \mathcal{O}_{F'}\}$$

l'orthogonal de M_J pour la forme hermitienne Φ_{J,c_J} .

LEMME 1.4.1. *Pour chaque partie J de I et chaque $c_J \in E_J^\times$, l'ensemble de réseaux ci-dessus est un ensemble fini.*

Démonstration. Pour tout réseau dans cet ensemble, on a

$$\mathfrak{a}_J M_J \subset M_J \subset \mathcal{O}_{E'_J} M_J$$

et

$$(\mathcal{O}_{E'_J} M_J)^{\perp c_J} \subset M_J \subset (\mathfrak{a}_J M_J)^{\perp c_J}.$$

Or on a $\mathcal{O}_{E'_J} M_J = \varpi_{E'_J}^{-\underline{m}_J} \mathcal{O}_{E'_J}$ pour une famille d'entiers $\underline{m}_J = (m_i)_{i \in J}$ indexée par J , et donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_J M_J &= \varpi_{E'_J}^{\underline{a}_J - \underline{m}_J} \mathcal{O}_{E'_J}, \\ (\mathcal{O}_{E'_J} M_J)^{\perp c_J} &= \varpi_{E'_J}^{\underline{m}_J} (\mathcal{O}_{E'_J})^{\perp c_J} = \varpi_{E'_J}^{-\underline{b}_J + \underline{m}_J} \mathcal{O}_{E'_J} \end{aligned}$$

et

$$(\mathfrak{a}_J M_J)^{\perp c_J} = \varpi_{E'_J}^{-\underline{a}_J + \underline{m}_J} (\mathcal{O}_{E'_J})^{\perp c_J} = \varpi_{E'_J}^{-\underline{a}_J - \underline{b}_J + \underline{m}_J} \mathcal{O}_{E'_J}$$

où $\underline{b}_J = (b_i)_{i \in J}$ est la famille d'entiers définie par $c_i^{-1} \mathfrak{D}_{E_i/F}^{-1} = \varpi_{E_i}^{-b_i} \mathcal{O}_{E_i}$. On en déduit que

$$b_i \leq 2m_i \leq 2a_i + b_i, \quad \forall i \in J,$$

et que

$$\varpi_{E'_J}^{a_J - [\frac{b_J}{2}]} \mathcal{O}_{E'_J} \subset M_J \subset \varpi_{E'_J}^{-a_J - b_J + [\frac{b_J}{2}]} \mathcal{O}_{E'_J},$$

d'où le lemme. □

L'ensemble des réseaux M_J de E'_J qui sont à la fois auto-duaux pour Φ_{J,c_J} et stables par γ_J , admet encore la description suivante qui est le point de départ de ce travail. Considérons la $\mathcal{O}_{F'}$ -algèbre $A_J = \mathcal{O}_{F'}[\gamma_J] = \mathcal{O}_{F'}[T]/(P_J(T))$ où $P_J(T) = \prod_{i \in J} P_i(T)$, munie de l'involution qui induit τ sur $\mathcal{O}_{F'}$ et qui envoie T sur $-T$. Alors, E'_J est l'anneau total des fractions de A_J et les $\mathcal{O}_{F'}$ -réseaux $M_J \subset E'_J$ tels que $\gamma_J M_J \subset M_J$ ne sont rien d'autre que les idéaux fractionnaires de A_J . Un tel idéal fractionnaire admet un inverse

$$M_J^{-1} = \{m \in E'_J \mid xM_J \subset A_J\}.$$

LEMME 1.4.2. *Pour tout $c_J \in E_J^\times$, l'orthogonal du $\mathcal{O}_{F'}$ -réseau $A_J \subset E'_J$ relativement à la forme hermitienne Φ_{J,c_J} est*

$$(A_J)^{\perp_{c_J}} = \left(\bigoplus_{i \in J} \frac{1}{c_i \frac{dP_i}{dT}(\gamma_i) P_{J-\{i\}}(\gamma_i)} \right) A_J \subset E'_J.$$

Plus généralement, pour tout $c_J \in E_J^\times$ et tout idéal fractionnaire M_J de A_J on a la relation

$$M_J^{\perp_{c_J}} = \left(\bigoplus_{i \in J} \frac{1}{c_i \frac{dP_i}{dT}(\gamma_i) P_{J-\{i\}}(\gamma_i)} \right) M_J^{-1}.$$

Démonstration. Voir la démonstration de la proposition 11, §6, ch. III, de [Ser]. □

En particulier, si on note

$$c_{J,i}^0 = \frac{\varepsilon^{n_J-1}}{\frac{dP_i}{dT}(\gamma_i) P_{J-\{i\}}(\gamma_i)} \in E_i^\times, \forall i \in J,$$

où ε est un élément de $\mathbb{F}_{q^2} \subset F'$ tel que $\varepsilon^\tau = -\varepsilon$, on a $c_J^0 = (c_{J,i}^0)_{i \in J} \in E_J^\times$ et le $\mathcal{O}_{F'}$ -réseau $A_J \subset E'_J$ est auto-dual pour la forme hermitienne Φ_{J,c_J^0} .

LEMME 1.4.3. *On a*

$$\lambda_{J,i}^0 := \lambda_i(c_{J,i}^0) \equiv \sum_{j \in J-\{i\}} r_{ji} \pmod{2}$$

pour toute partie J de I et tout $i \in J$.

Démonstration. On a vu que

$$\lambda_i(c_{J,i}^0) \equiv \frac{n_i v_{E_i}(c_{J,i}^0)}{e_i} + n_i - \frac{n_i}{e_i} \pmod{2}.$$

Or

$$v_{E'_i} \left(\frac{dP_i}{dT}(\gamma_i) P_{J-\{i\}}(\gamma_i) \right) = \frac{2\delta_i e_i}{n_i} + e_i - 1 + \sum_{j \in J-\{i\}} \frac{e_i r_{ji}}{n_i},$$

d'où le lemme. □

1.5. *Énoncé du lemme fondamental.* Pour chaque $J \subset I$ et pour chaque c_J tel que $\sum_{i \in J} \lambda_i(c_i) = 0$, le cardinal de l'ensemble fini de réseaux

$$O_{\gamma_J}^{c_J} = |\{M_J \subset E'_J \mid M_J^{\perp c_J} = M_J \text{ et } \gamma_J M_J \subset M_J\}|$$

ne dépend que de $\lambda_J(c_J) = (\lambda_i(c_i))_{i \in J}$. Soit $\Lambda_J = \{\lambda_J \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J \mid \sum_{i \in J} \lambda_i = 0\}$. Pour chaque $\lambda_J \in \Lambda_J$ on peut donc noter

$$O_{\gamma_J}^{\lambda_J} = O_{\gamma_J}^{c_J}$$

pour n'importe quel c_J tel que $\lambda_J(c_J) = \lambda_J$.

En fait $O_{\gamma_J}^{\lambda_J}$ est une intégrale orbitale. Plus précisément, choisissons $c_J \in E'_J$ tel que $\lambda_J(c_J) = \lambda_J$. Comme le discriminant de Φ_{J,c_J} est égal à 1, le F' -espace vectoriel hermitien (E'_J, Φ_{J,c_J}) est isomorphe au F' -espace hermitien standard (F'^{n_J}, Φ_{n_J}) . Choisissons un tel isomorphisme et considérons le plongement de l'algèbre de Lie de

$$T_J(F) = \prod_{i \in J} \{x \in E'_i \mid x^T x = 1\}$$

dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(n_J)$ de $U(n_J)$ qu'il induit. La classe de $G(F)$ -conjugaison de l'image $\gamma_J^{\lambda_J}$ de γ_J par ce dernier plongement ne dépend pas des choix que l'on vient de faire. Alors, $O_{\gamma_J}^{\lambda_J}$ est précisément l'intégrale orbitale de la fonction caractéristique du compact maximal standard \mathfrak{K}_{n_J} de $\mathfrak{u}(n_J)(F)$.

Soit $I = I_1 \amalg I_2$ une partition de I . La donnée de cette partition équivaut à la donnée d'un caractère

$$\kappa_{I_1, I_2} : \Lambda_I \rightarrow \{\pm 1\}$$

à savoir le caractère κ défini par

$$\kappa(\lambda_I) = (-1)^{\sum_{i \in I_1} \lambda_i} = (-1)^{\sum_{i \in I_2} \lambda_i}.$$

On a alors la « κ -intégrale orbitale»

$$O_{\gamma}^{\kappa} = \sum_{\lambda_I \in \Lambda_I} \kappa(\lambda_I - (\lambda_{I_1}^0, \lambda_{I_2}^0)) O_{\gamma}^{\lambda_I}$$

et l'«intégrale orbitale endoscopique stable»

$$SO_{\gamma}^H = \sum_{\substack{\lambda_{I_1} \in \Lambda_{I_1} \\ \lambda_{I_2} \in \Lambda_{I_2}}} O_{\gamma_{I_1}}^{\lambda_{I_1}} \times O_{\gamma_{I_2}}^{\lambda_{I_2}}.$$

L'objet de cet article est de démontrer le théorème suivant conjecturé par Langlands et Shelstad (cf. [La-Sh]) et appelé par eux le « lemme fondamental pour les groupes unitaires » (ou plutôt sa variante algèbre de Lie).

THÉORÈME 1.5.1. *Sous les hypothèses précédentes, on a la relation*

$$\mathcal{O}_\gamma^\kappa = (-1)^r q^r \mathrm{SO}_\gamma^H$$

où on a posé

$$r = r_{I_1, I_2} = \sum_{\substack{i_1 \in I_1 \\ i_2 \in I_2}} r_{i_1, i_2}.$$

En faisant passer le terme $(-1)^r q^r$ de l'autre côté de l'égalité, on fait apparaître dans l'expression de la κ -intégrale orbitale comme combinaison linéaire d'intégrales orbitales, des coefficients

$$\kappa(\lambda_I - (\lambda_{I_1}^0, \lambda_{I_2}^0))(-1)^r q^{-r}$$

qui sont égaux aux facteurs de transfert de Langlands-Shelstad (cf. [La-Sh]), d'après des calculs de Waldspurger valables pour tous les groupes classiques (cf. la proposition X.8 de [Wal 4]). Ces facteurs sont aussi les mêmes que ceux définis par Kottwitz à l'aide des sections de Kostant (cf. [Kot 2]).

2. Fibration de Hitchin

2.1. *Schémas en groupes unitaires et fibrés hermitiens.* On fixe une courbe projective, lisse et géométriquement connexe X sur $k = \mathbb{F}_q$, de genre géométrique $g \geq 1$, et un revêtement étale, galoisien, de degré 2, $\pi : X' \rightarrow X$, dont l'espace total X' est donc une courbe projective et lisse que l'on suppose aussi géométriquement connexe. On note τ l'élément non trivial du groupe de Galois de X' sur X .

On fixe un entier $n \geq 1$ et l'on suppose que la caractéristique de k est $> n$, et impaire si $n = 1$.

On munit le fibré vectoriel trivial $\mathcal{O}_{X'}^{\oplus n}$ de rang $n \geq 1$ sur X' de la forme hermitienne

$$\Phi_n : \mathcal{O}_{X'}^n \times \mathcal{O}_{X'}^n \rightarrow \mathcal{O}_{X'}$$

dont la matrice Φ_n a pour seules entrées non nulles les $(\Phi_n)_{i, n+1-i} = 1$.

On définit alors le schéma en groupes unitaires G sur X par

$$G(S) = \{g \in \mathrm{GL}_n(H^0(X'_S, \mathcal{O}_{X'_S})) \mid \tau^*({}^t g)\Phi_n g = \Phi_n\}$$

où pour tout X -schéma S , on a noté par un indice S le changement de base par le morphisme structural $S \rightarrow X$.

Le X' -schéma en groupes $G_{X'} = X' \times_{\pi, X} G$ n'est autre que $\mathrm{GL}_{n, \mathcal{O}_{X'}}$ puisque $X' \times_X X'$ est la somme disjointe de deux copies de X' , τ échangeant ces deux copies.

Il s'en suit que la restriction de G au complété formel $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_x)$ de X en un point fermé x est isomorphe à $\mathrm{GL}_{n, \mathcal{O}_x}$ si x est décomposé dans X' . Par contre, si x est inerte dans X' , cette restriction est un schéma en groupes unitaires non ramifié.

Le choix de la forme hermitienne Φ_n assure que G est quasi-déployé: le drapeau standard

$$(0) \subset \mathcal{O}_{X'} \subset \mathcal{O}_{X'}^{\oplus 2} \subset \dots \subset \mathcal{O}_{X'}^{\oplus n}$$

est auto-dual et définit donc un X -schéma en sous-groupes de Borel de G .

Pour tout X -schéma S , un G_S -torseur peut se décrire concrètement comme un fibré hermitien (\mathcal{E}, Φ) de rang n formé d'un fibré vectoriel \mathcal{E} de rang n sur X'_S muni d'une forme hermitienne non dégénérée, c'est-à-dire d'un isomorphisme

$$\Phi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \tau_S^* \mathcal{E}^\vee$$

dont le transposé ${}^t\Phi$ est égal à $\tau_S^* \Phi$. On a noté $\mathcal{E}^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X'_S}}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{X'_S})$ le fibré vectoriel dual de \mathcal{E} . Pour abrégé nous appellerons parfois la donnée d'un tel isomorphisme Φ une structure unitaire sur le fibré vectoriel \mathcal{E} . Le G_S -torseur correspondant est

$$\mathcal{T} = \mathcal{I}som_{\mathcal{O}_{X'_S}}((\mathcal{O}_{X'_S}^n, \Phi_n), (\mathcal{E}, \Phi))$$

muni de l'action évidente à droite de G_S .

2.2. Paires de Hitchin. À tout G_S -torseur \mathcal{T} comme ci-dessus on peut associer le fibré vectoriel $\mathrm{ad}(\mathcal{T})$ sur S déduit de \mathcal{T} par la représentation adjointe de G . Si \mathcal{T} correspond au fibré hermitien (\mathcal{E}, Φ) , $\mathrm{ad}(\mathcal{T})$ n'est autre que le sous-fibré vectoriel de rang n^2 de $\pi_{S,*} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{X'_S}}(\mathcal{E})$ formé des endomorphismes hermitiens de (\mathcal{E}, Φ) .

Soit D un diviseur effectif sur X de degré $\geq g + 1$.

Pour chaque entier i , on note $(-)(iD)$ le foncteur $(-) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(iD)$ de la catégorie des \mathcal{O}_S -modules dans elle-même sur n'importe quel X -schéma S .

Une *paire de Hitchin* sur un k -schéma S (à valeurs dans $2D$) est un couple (\mathcal{T}, θ) où \mathcal{T} est un $G_{S \times_k X}$ -torseur et où

$$\theta \in H^0(S \times_k X, \mathrm{ad}(\mathcal{T})(2D)).$$

En termes concrets, une paire de Hitchin sur un k -schéma S à valeurs dans $2D$ est un triplet, dit aussi de Hitchin, $(\mathcal{E}, \Phi, \theta)$ où (\mathcal{E}, Φ) est un fibré hermitien de rang n sur $S \times_k X'$ et où

$$\theta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}(2D)$$

est un homomorphisme de fibrés vectoriels sur $S \times_k X'$ tel que

$$\Phi(2D) \circ \theta + \tau^*({}^t\theta)(2D) \circ \Phi = 0.$$

On considère le k -champ \mathcal{M} classifiant ces paires.

PROPOSITION 2.2.1. *Le k -champ \mathcal{M} est algébrique et localement de type fini sur k .*

Démonstration. On sait que le champ des fibrés vectoriels \mathcal{E} de rang n sur X' est algébrique localement de type fini sur k . Pour prouver la proposition, il suffit donc de montrer que les morphismes d'oubli

$$(\mathcal{E}, \Phi) \mapsto \mathcal{E}$$

et

$$(\mathcal{E}, \Phi, \theta) \mapsto (\mathcal{E}, \Phi)$$

sont représentables et de type fini, ce qui est évident. \square

2.3. *Section de Kostant.* Soient K'/K une extension quadratique de corps de caractéristique différente de 2 et $a \mapsto \bar{a}$ l'élément non trivial du groupe de Galois de K'/K . Considérons le groupe unitaire

$$G = \{g \in \mathrm{GL}_n(K') \mid {}^t \bar{g} \Phi_n g = \Phi_n\}$$

et son algèbre de Lie

$$\mathfrak{g} = \{\xi \in \mathfrak{gl}_n(K') \mid {}^t \bar{\xi} \Phi_n + \Phi_n \xi = 0\}.$$

Le polynôme caractéristique

$$T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_n \in K'[T]$$

de tout $\xi \in \mathfrak{g}$ vérifie nécessairement

$$\bar{a}_i = (-1)^i a_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Kostant a défini une classe de section

$$\bigoplus_{i=1}^n \{a \in K' \mid \bar{a} = (-1)^i a\} \rightarrow \mathfrak{g}$$

du morphisme polynôme caractéristique.

En voici un exemple. Dans l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][a_1, \dots, a_n]$ muni de la graduation pour laquelle a_i est de degré i quel que soit $i = 1, \dots, n$, il existe des éléments

$$b_1 = \frac{a_1}{2}, \quad b_2 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_1^2}{8}, \quad b_3 = \frac{a_3}{2} - \frac{a_1 a_2}{4} + \frac{a_1^3}{16}, \dots, \quad b_i = \frac{a_i}{2} + c_i(a_1, \dots, a_{i-1}), \dots$$

tels que b_i soit homogène de degré i quel que soit $i = 1, \dots, n$ et que la matrice

$$\begin{pmatrix} -b_1 & -b_2 & \cdots & \cdots & -b_{n-1} & -2b_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -b_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -b_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -b_1 \end{pmatrix}$$

ait pour polynôme caractéristique

$$T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_n.$$

L'application

$$\bigoplus_{i=1}^n \{a \in K' \mid \bar{a} = (-1)^i a\} \rightarrow \mathfrak{g}$$

qui envoie (a_1, \dots, a_n) sur la matrice ci-dessus est une section de Kostant.

2.4. *Morphisme de Hitchin.* L'espace de Hitchin \mathbb{A} est le k -schéma affine naturellement associé au sous- k -espace vectoriel

$$\bigoplus_{i=1}^n H^0(X', \mathcal{O}_{X'}(2iD))^{\tau^* = (-1)^i} \subset \bigoplus_{i=1}^n H^0(X', \mathcal{O}_{X'}(2iD)).$$

Si on note

$$\pi_* \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{L}$$

la décomposition en sous- \mathcal{O}_X -modules propres pour l'automorphisme τ^* , \mathbb{A} est encore le k -schéma affine naturellement associé au k -espace vectoriel

$$\bigoplus_{i=1}^n H^0(X, (\mathcal{L}_D)^{\otimes i})$$

où on a posé $\mathcal{L}_D = \mathcal{L}(2D)$ (puisque $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ est canoniquement isomorphe à \mathcal{O}_X).

On définit la *caractéristique* d'un triplet de Hitchin $(\mathcal{E}, \Phi, \theta)$ sur un k -schéma S comme le S -point de \mathbb{A} suivant: pour chaque entier $i = 1, \dots, n$, on considère la trace de l'homomorphisme

$$\wedge^i \theta : \bigwedge_{\mathcal{O}_{X'_S}} \mathcal{E} \rightarrow \left(\bigwedge_{\mathcal{O}_{X'_S}} \mathcal{E} \right) (2iD)$$

qui est une section globale de $\mathcal{O}_{X'_S}(2iD)$; on a

$$\tau^*(\text{tr } \wedge^i \theta) = (-1)^i \text{tr } \wedge^i \theta$$

puisque $\Phi(2D) \circ \theta + (\tau^* \theta)(2D) \circ \Phi = 0$, et $\bigoplus_{i=1}^n (-1)^i \text{tr } \wedge^i \theta$ est donc un S -point de \mathbb{A} . Ci-dessus on a noté $X'_S = S \times_k X'$.

Le *morphisme de Hitchin* est le morphisme de champs algébriques

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{A}$$

qui associe à chaque triplet de Hitchin $(\mathcal{E}, \Phi, \theta)$ sa caractéristique.

Pour tout choix d'une section de Kostant comme dans (2.3), on a une section correspondante du morphisme de Hitchin, que l'on appelle encore *section de Kostant*. Cette dernière section associe à tout point a de \mathbb{A} le triplet $(\mathcal{E}, \Phi, \theta)$ où $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X'}((n+1-2i)D)$, où Φ a pour matrice Φ_n et où θ est donné par la matrice de Kostant ci-dessus.

2.5. *Courbes spectrales.* Rappelons la construction de la courbe spectrale associée à un S -point a de \mathbb{A} (cf. [B-N-R]).

Soit $p : \Sigma = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus (\mathcal{L}_D)^{\otimes -1}) \rightarrow X$ la complétion projective du fibré en droites $p^\circ : \Sigma^\circ = \mathbb{V}((\mathcal{L}_D)^{\otimes -1}) \rightarrow X$ dont les sections sont celles de \mathcal{L}_D ; c'est un fibré en droites projectives. On a $p_*\mathcal{O}_\Sigma(1) = \mathcal{O}_X \oplus (\mathcal{L}_D)^{\otimes -1}$ et la section $(1, 0)$ de cette image directe définit donc une section globale V de $\mathcal{O}_\Sigma(1)$; de même, on a $p_*(\mathcal{O}_\Sigma(1) \otimes_{\mathcal{O}_\Sigma} p^*\mathcal{L}_D) = \mathcal{L}_D \oplus \mathcal{O}_X$ et la section $(0, 1)$ de cette image directe définit une section globale U de $\mathcal{O}_\Sigma(1) \otimes_{\mathcal{O}_\Sigma} p^*\mathcal{L}_D$. Le couple $(U; V)$ est un système de coordonnées homogènes relatives sur Σ ; le lieu des zéros de U (resp. V) est la section nulle $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X) \subset \Sigma^\circ$ (resp. la section à l'infini $\mathbb{P}((\mathcal{L}_D)^{\otimes -1}) = \Sigma - \Sigma^\circ$) de Σ° .

Si $a = \bigoplus_{i=1}^n a_i$ est un point de \mathbb{A} à valeurs dans un k -schéma S , on a la section

$$U^n + (p^*a_1)VU^{n-1} + \cdots + (p^*a_n)V^n$$

de $\mathcal{O}_S \boxtimes_k (\mathcal{O}_\Sigma(n) \otimes_{\mathcal{O}_\Sigma} p^*(\mathcal{L}_D)^{\otimes n})$ dont le lieu des zéros est une S -courbe projective Y_a tracée sur la S -surface projective $\Sigma_S = S \times_k \Sigma$. Cette courbe est par construction un revêtement ramifié de degré n de $X_S = S \times_k X$ par la restriction $p_a : Y_a \rightarrow X_S$ à Y_a de la projection $p_S : \Sigma_S \rightarrow X_S$.

On remarquera que la courbe spectrale Y_a ne coupe pas la section infinie et est par conséquent entièrement contenue dans la carte $\Sigma_S^\circ = S \times_k \Sigma^\circ = \{V \neq 0\} = \mathbb{V}(\mathcal{O}_S \boxtimes_k (\mathcal{L}_D)^{\otimes -1})$. C'est donc aussi le lieu des zéros dans Σ_S° de la section

$$u^n + ((p^\circ)^*a_1)u^{n-1} + \cdots + ((p^\circ)^*a_n)$$

de $\mathcal{O}_S \boxtimes_k (p^\circ)^*(\mathcal{L}_D)^{\otimes n}$ où $u = \frac{U}{V}$. En particulier, la \mathcal{O}_{X_S} -algèbre $p_{a,*}\mathcal{O}_{Y_a}$ est isomorphe à

$$(\mathcal{O}_S \boxtimes_k \text{Sym}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{L}_D)^{\otimes -1}))/\mathcal{I}_a$$

où \mathcal{I}_a est l'idéal engendré par l'image de l'homomorphisme

$$\mathcal{O}_S \boxtimes_k (\mathcal{L}_D)^{\otimes -n} \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_S \boxtimes_k (\mathcal{L}_D)^{\otimes -i} \subset \mathcal{O}_S \boxtimes_k \text{Sym}_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{L}_D)^{\otimes -1})$$

de composantes $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, 1)$.

On note $D(a)$ le discriminant de la caractéristique a , c'est-à-dire le résultant du polynôme

$$u^n + a_1 u^{n-1} + \dots + a_n$$

et de sa dérivée

$$nu^{n-1} + (n-1)a_1 u^{n-2} + \dots + a_{n-1};$$

c'est une section globale de $(\mathcal{L}_D)^{\otimes n(n-1)}$.

En fait, on a une courbe spectrale universelle

$$\begin{array}{ccc} Y & \subset & \Sigma \times_k \mathbb{A} \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathbb{A} & & \end{array}$$

dont le changement de base par $a : S \rightarrow \mathbb{A}$ est Y_a . Le morphisme $Y \rightarrow \mathbb{A}$ est projectif, plat, localement d'intersection complète, purement de dimension relative 1. Sa fibre la plus mauvaise est celle en $a = 0 \in \mathbb{A}$: c'est le lieu des zéros de U^n , c'est-à-dire la section nulle de $\Sigma^\circ \rightarrow X$ comptée avec multiplicité n .

LEMME 2.5.1. *Pour tout point géométrique a de \mathbb{A} les conditions suivantes sont équivalentes (on rappelle que $p > n$):*

- (i) *la courbe spectrale Y_a est réduite,*
- (ii) *le revêtement $Y_a \rightarrow X$ est étale au-dessus du point générique de X ,*
- (iii) *le discriminant $D(a)$ n'est pas identiquement nul.*

Le plus grand ouvert $\mathbb{A}^{\text{red}} \subset \mathbb{A}$ au-dessus duquel $Y \rightarrow \mathbb{A}$ est à fibres géométriquement réduites est donc l'ouvert des a tels que $D(a)$ n'est pas identiquement nul.

Ce lieu contient l'ouvert $\mathbb{A}^{\text{lisse}}$ au-dessus duquel $Y \rightarrow \mathbb{A}$ est lisse.

Ces lieux sont non vides dès que $(\mathcal{L}_D)^{\otimes n}$ admet une section a_n qui n'a que des zéros simples puisqu'alors la courbe spectrale Y_a où $a = 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus a_n$ est lisse. D'après le théorème de Riemann-Roch et le théorème de Bertini, ces lieux sont donc non vides dès que $(\mathcal{L}_D)^{\otimes n}$ est très ample, c'est-à-dire dès que $2n \deg(D) \geq 2g + 1$.

Notre motivation principale pour introduire l'ouvert \mathbb{A}^{red} est la proposition suivante dont la démonstration sera donnée à la fin de la section 2.6.

PROPOSITION 2.5.2. *La restriction \mathcal{M}^{red} de \mathcal{M} au-dessus de l'ouvert $\mathbb{A}^{\text{red}} \subset \mathbb{A}$ est lisse sur \mathbb{F}_q .*

On utilisera dans la suite la variante suivante du lemme de Gauß.

LEMME 2.5.3. *Soient a un point géométrique de \mathbb{A}^{red} et Z une composante irréductible de Y_a . Alors, il existe un unique entier m compris entre 1 et n et une famille unique de sections $b_j \in \kappa(a) \otimes_k H^0(X, (\mathcal{L}_D)^{\otimes j})$,*

$j = 1, \dots, m$, tels que Z soit le diviseur de Cartier sur $\mathbb{V}((\mathcal{L}_D)^{\otimes -1})$ défini par l'équation

$$u^m + ((p^\circ)^*b_1)u^{m-1} + \dots + ((p^\circ)^*b_m) = 0.$$

Démonstration. Notons simplement L la fibre de \mathcal{L}_D au point générique de $\kappa(a) \otimes_k X$. Comme Z est un revêtement fini génériquement étale de $\kappa(a) \otimes_k X$ de degré m compris entre 1 et n , la théorie de Galois assure qu'il existe des uniques $b_j \in L^{\otimes j}$ et des uniques $c_k \in L^{\otimes k}$ tels que

$$u^n + a_1u^{n-1} + \dots + a_n = (u^m + b_1u^{m-1} + \dots + b_m)(u^{n-m} + c_1u^{n-m-1} + \dots + c_{n-m})$$

et que Z soit le diviseur de Cartier défini par le premier facteur. Il ne reste plus qu'à vérifier que chaque b_j est en fait dans $\kappa(a) \otimes_k H^0(X, (\mathcal{L}_D)^{\otimes j}) \subset L^{\otimes j}$.

Il revient au même de se donner la section globale a_i de $(\mathcal{L}_D)^{\otimes i}$ ou de se donner une section

$$a_i : \kappa(a) \otimes_k X \rightarrow \kappa(a) \otimes_k \mathbb{V}((\mathcal{L}_D)^{\otimes -i})$$

de la projection canonique, ou encore de se donner un morphisme

$$a_i : \kappa(a) \otimes_k \mathbb{V}(\mathcal{L}_D) \rightarrow \mathbb{A}_{\kappa(a)}^1$$

qui est $\mathbb{G}_{m, \kappa(a)}$ -équivariant au sens où $a_i(tv) = t^i a_i(v)$. Par suite, la donnée de a équivaut à celle d'un morphisme $\mathbb{G}_{m, \kappa(a)}$ -équivariant

$$\kappa(a) \otimes_k \mathbb{V}(\mathcal{L}_D) \rightarrow \mathbb{A}_{\kappa(a)}^n$$

et on cherche à factoriser ce morphisme en

$$\kappa(a) \otimes_k \mathbb{V}(\mathcal{L}_D) \rightarrow \mathbb{A}_{\kappa(a)}^m \times_{\kappa(a)} \mathbb{A}_{\kappa(a)}^{n-m} \rightarrow \mathbb{A}_{\kappa(a)}^n$$

où la seconde flèche envoie $((y_1, \dots, y_m), (z_1, \dots, z_{n-m}))$ sur les coefficients $(y_1 + z_1, y_2 + z_2 + y_1 z_1, \dots, y_m z_n)$ du polynôme produit

$$(T^m + y_1 T^{m-1} + \dots + y_m)(T^{n-m} + z_1 T^{n-m-1} + \dots + z_{n-m}).$$

Or cette seconde flèche est un revêtement (ramifié) fini qui est $\mathbb{G}_{m, \kappa(a)}$ -équivariant et on a déjà une factorisation au dessus du point générique de $\kappa(a) \otimes_k X$ par l'argument de théorie de Galois qui précède. Par suite, on a par changement de base un revêtement fini $\mathbb{G}_{m, \kappa(a)}$ -équivariant de $\kappa(a) \otimes_k \mathbb{V}(\mathcal{L}_D)$ et une section de ce revêtement au-dessus du point générique de $\kappa(a) \otimes_k X$. En prenant l'adhérence Z de cette section, on obtient un morphisme $\mathbb{G}_{m, \kappa(a)}$ -équivariant

$$Z \rightarrow \kappa(a) \otimes_k \mathbb{V}(\mathcal{L}_D)$$

qui est fini et un isomorphisme au-dessus du point générique de $\kappa(a) \otimes_k X$. Un tel morphisme est nécessairement un isomorphisme puisque $\kappa(a) \otimes_k \mathbb{V}(\mathcal{L}_D)$ est normal. \square

2.6. *Champs de Picard.* Pour tout S -point a de \mathbb{A}^{red} , on note $\pi_a : Y'_a = X' \times_X Y_a \rightarrow Y_a$ le revêtement double étale déduit du revêtement double étale $\pi : X' \rightarrow X$ et $p'_a : Y'_a \rightarrow X'$ la projection canonique. L'involution τ de X' au-dessus de X induit une involution notée encore τ de Y'_a au-dessus de Y_a .

Le *champ de Picard relatif* de la S -courbe Y'_a (à fibres géométriquement réduites) est le champ des $\mathcal{O}_{Y'_a}$ -modules inversibles. C'est un champ algébrique localement de type fini sur S que l'on note $\text{Pic}_{Y'_a/S}$. Ce champ est naturellement muni d'une structure de groupe induite par le produit tensoriel. En fait, c'est une \mathbb{G}_m -gerbe sur le schéma en groupes de Picard relatif de Y'_a/S qui existe sous nos hypothèses. Le champ $\text{Pic}_{Y'_a/S}$ est de plus muni d'une involution compatible à sa structure de groupe, qui envoie \mathcal{F} sur $\mathcal{F}^{\otimes -1} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y'_a}}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{Y'_a})$.

Le *champ de Picard compactifié relatif* de Y'_a est le champ des $\mathcal{O}_{Y'_a}$ -modules cohérents \mathcal{F} sans torsion de rang 1, c'est-à-dire S -plats et dont la restriction à chaque fibre de $Y'_a \rightarrow S$ est partout sans torsion et de rang 1 en chaque point générique. C'est un champ algébrique localement de type fini sur S que l'on note $\overline{\text{Pic}}_{Y'_a/S}$. Il contient $\text{Pic}_{Y'_a/S}$ comme un ouvert qui est dense fibre à fibre de sa projection sur S puisque Y'_a est plongée dans une surface relative sur S (cf. [Reg] et [A-I-K]). Le champ $\overline{\text{Pic}}_{Y'_a/S}$ est naturellement muni d'une action de $\text{Pic}_{Y'_a/S}$ qui prolonge l'action par translation de $\text{Pic}_{Y'_a/S}$ sur lui-même et qui est induite par le produit tensoriel. Il est de plus muni d'une involution qui envoie \mathcal{F} sur

$$\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Y'_a}}(\mathcal{F}, \omega_{Y'_a/X'_S})$$

où $\omega_{Y'_a/X'_S} = \omega_{Y'_a} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'_a}} (p'_a{}^* \omega_{X'_S/S})^{\otimes -1}$ est le module dualisant relatif de Y'_a au-dessus de $X'_S = S \times_k X'$. L'action du champ de Picard sur le champ de Picard compactifié est compatible aux involutions que l'on vient de définir.

Remarque. Pour tout S -point a de \mathbb{A}^{red} on a

$$\omega_{Y_a/S \times_k X} = p_a^*(\mathcal{L}_D)^{\otimes n-1}$$

puisque $\Omega_{\Sigma^\circ/X}^1$ est une extension de $(p^\circ)^* \Omega_X^1$ par $(p^\circ)^* \mathcal{L}_D$ et que

$$(\mathcal{I}_a/\mathcal{I}_a^2)|_{Y_a} = p_a^*(\mathcal{L}_D)^{\otimes -n}$$

où \mathcal{I}_a est l'idéal qui définit Y_a dans $S \times_k \Sigma^\circ$. Comme $X' \rightarrow X$ est étale, on a aussi $\omega_{Y'_a/S \times_k X'} = p'_a{}^* \mathcal{O}_{X'}(2(n-1)D)$. \square

L'involution τ de Y'_a induit une autre involution τ^* sur les champs $\text{Pic}_{Y'_a/S}$ et $\overline{\text{Pic}}_{Y'_a/S}$. On note

$$P_a = (\text{Pic}_{Y'_a/S})^{\tau^* = (-)^{\otimes -1}}$$

la partie primitive pour cette involution, c'est-à-dire le champ des couples (\mathcal{F}, ι) où \mathcal{F} est un $\mathcal{O}_{Y'_a}$ -module inversible et où $\iota : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \tau^* \mathcal{F}^{\otimes -1}$ est un isomorphisme

de $\mathcal{O}_{Y'_a}$ -modules tel que $\iota = \tau^*(\iota^{\otimes -1})$. De même on note

$$\overline{P}_a = (\overline{\text{Pic}}_{Y'_a/S})^{\tau^* = (-)^\vee}$$

le champ des couples (\mathcal{F}, ι) où \mathcal{F} est un $\mathcal{O}_{Y'_a}$ -module cohérent sans torsion de rang 1 et où $\iota : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \tau^* \mathcal{F}^\vee$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{Y'_a}$ -Modules tel que $\iota = \tau^*(\iota^\vee)$. On a encore une action de P_a sur \overline{P}_a mais on n'a plus *a priori* de plongement de P_a dans \overline{P}_a . Un tel plongement existe après le choix d'une section, par exemple une section de Kostant.

Bien sûr, pour $S = \mathbb{A}^{\text{red}}$ et a l'identité de \mathbb{A}^{red} , on obtient des champs universels $P \rightarrow \mathbb{A}^{\text{red}}$ et $\overline{P} \rightarrow \mathbb{A}^{\text{red}}$.

On remarque que, pour tout $\mathcal{F} \in \overline{P}_a(S)$, $p'_{a,*} \mathcal{F}$ est un fibré vectoriel de rang n sur $X'_S = S \times_k X'$ et que

$$p'_{a,*}(\mathcal{F}^\vee) = (p'_{a,*} \mathcal{F})^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'_S}}(p'_{a,*} \mathcal{F}, \mathcal{O}_{X'_S}).$$

On a donc un morphisme de \mathbb{A}^{red} -champs

$$\overline{P} \rightarrow \mathbb{A}^{\text{red}} \times_{\mathbb{A}} \mathcal{M}$$

qui envoie $(\mathcal{F}, \iota) \in \overline{P}_a(S)$ sur le triplet de Hitchin $(\mathcal{E}, \Phi, \theta)$ sur S de caractéristique a où $\mathcal{E} = p'_{a,*} \mathcal{F}$, où

$$\Phi = p'_{a,*} \iota : \mathcal{E} = p'_{a,*} \mathcal{F} \rightarrow p'_{a,*} \tau^* \mathcal{F}^\vee = \tau^*(p'_{a,*} \mathcal{F})^\vee = \tau^* \mathcal{E}^\vee$$

vérifie l'équation $\Phi = \tau^*(\Phi^\vee)$ et où θ est défini par l'homomorphisme

$$\mathcal{O}_{X'_S}(-2D) \subset \text{Sym}_{\mathcal{O}_{X'_S}}(\mathcal{O}_{X'_S}(-2D))/\mathcal{I}'_a = (p'_a)_* \mathcal{O}_{Y'_a} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{O}_{X'_S}}(\mathcal{E}),$$

\mathcal{I}'_a étant l'idéal engendré par l'image de l'homomorphisme

$$(\mathcal{O}_{X'_S}(-2D))^{\otimes -n} \rightarrow \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{O}_{X'_S}(-2D))^{\otimes -i} \subset \text{Sym}_{\mathcal{O}_{X'_S}}(\mathcal{O}_{X'_S}(-2D))$$

de composantes $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, 1)$.

La proposition suivante est une variante d'un résultat de Beauville, Narasimhan et Ramanan (cf. [B-N-R]).

PROPOSITION 2.6.1. *Le morphisme de \mathbb{A}^{red} -champs*

$$\overline{P} \rightarrow \mathbb{A}^{\text{red}} \times_{\mathbb{A}} \mathcal{M}$$

défini ci-dessus est un isomorphisme.

Démonstration. Pour démontrer que ce morphisme est un isomorphisme, nous allons construire un inverse. Soit $(\mathcal{E}, \Phi, \theta)$ un triplet de Hitchin sur S de caractéristique $a \in \mathbb{A}^{\text{red}}(S)$. Comme on l'a vu ci-dessus, la section globale

$$\theta \in H^0(X'_S, \text{End}_{\mathcal{O}_{X'_S}}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{X'}(2D))$$

munit \mathcal{E} d'une structure de $(\mathcal{O}_S \boxtimes_k \text{Sym}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_{X'}(-2D)))$ -Module. Puisque ce triplet a pour caractéristique a , ce $(\mathcal{O}_S \boxtimes_k \text{Sym}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_{X'}(-2D)))$ -Module est en fait un $(\mathcal{O}_S \boxtimes_k \text{Sym}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_{X'}(-2D)))/I'_a$ -Module. Le $\mathcal{O}_{Y'_a}$ -Module correspondant \mathcal{F} est alors S -plat et fibres par fibres un Module sans torsion de rang 1 sur Y'_a (voir [B-N-R]). Comme on l'a vu ci-dessus, par dualité, la donnée d'une structure unitaire Φ sur \mathcal{E} est équivalente à la donnée d'un isomorphisme $\iota : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \tau^*(\mathcal{F}^\vee)$ qui vérifie $\iota = \tau^*(\iota^\vee)$. \square

En particulier, la restriction à \mathbb{A}^{red} d'une section de Kostant (cf. la fin de la section (2.4)) est l'image d'une section de \overline{P} , qui est dite encore de Kostant.

Vu notre choix de \mathcal{L}_D , il y a une section de Kostant $(\mathcal{K}, \iota_{\mathcal{K}})$ de \overline{P} particulièrement jolie. Elle est donnée de la façon suivante. Pour tout S -point a de \mathbb{A}^{red} le $\mathcal{O}_{Y'_a}$ -Module inversible $p'_a{}^* \mathcal{O}_{X'}((n-1)D)$ est une racine carrée de $\omega_{Y'_a/S \times_k X'}$ et on pose

$$a^* \mathcal{K} = p'_a{}^* \mathcal{O}_{X'}((n-1)D) = \pi_a^* p_a^* \mathcal{L}((n-1)D)$$

où $\pi_a : Y'_a \rightarrow Y_a$ est induit par π . On prend pour

$$a^* \iota_{\mathcal{K}} : \tau^*(a^* \mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \omega_{Y'_a/S \times_k X'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'_a}} (a^*(\mathcal{K})^{\otimes -1}) = a^* \mathcal{K}$$

l'isomorphisme de descente de $a^* \mathcal{K}$ en $p_a^* \mathcal{L}((n-1)D)$.

Démonstration de la proposition 2.5.2. Soit $(\mathcal{E}, \Phi, \theta)$ un triplet de Hitchin dont la caractéristique a est dans l'ouvert \mathbb{A}^{red} de \mathbb{A} . Pour alléger les notations nous supposons dans la suite qu'il s'agit d'un k -point de \mathcal{M} , mais l'argument est général.

La fibre en ce point du complexe tangent à \mathcal{M} est le complexe $R\Gamma(X, K)$ où

$$K = [(\pi_* \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}))^{\tau^*=-1} \rightarrow (\pi_* \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}))^{\tau^*=-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_D]$$

est un complexe parfait concentré en degrés 0 et 1, avec pour différentielle l'application $\xi \rightarrow [\theta, \xi]$. Il s'agit de voir que $H^2(X, K) = (0)$.

En utilisant la forme de Killing, on peut identifier le dual du complexe K au complexe $K \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_D^{\otimes -1}$. Par dualité de Serre on est donc ramené à démontrer que

$$H^0(X, \mathcal{H}^0(K) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_D^{\otimes -1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^1) = (0).$$

Or

$$\mathcal{H}^0(K) = (\pi_* p'_{a,*} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{Y'_a}}(\mathcal{F}))^{\tau^*=-1}$$

où $(\mathcal{F}, \iota) \in \overline{P}_a(k)$ est le point correspondant à $(\mathcal{E}, \Phi, \theta)$. Soit $\rho : \tilde{Y}_a \rightarrow Y_a$ la normalisation de la courbe réduite Y_a et $\rho' : \tilde{Y}'_a = X' \times_X \tilde{Y}_a \rightarrow Y'_a$ son changement de base par π . On a une injection naturelle

$$\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_{Y'_a}}(\mathcal{F}) \hookrightarrow \rho'_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}'_a}.$$

En effet, si A est un anneau local de Y'_a et si \tilde{A} est la normalisation de A dans son anneau total des fractions $\text{Frac}(A)$, pour tout A -module M sans torsion de rangs génériques 1, on a

$$A \subset \text{End}_A(M) \subset \text{End}_{\text{Frac}(A)}(\text{Frac}(A) \otimes_A M) = \text{Frac}(A)$$

et donc $\text{End}_A(M) \subset \tilde{A}$ puisque $\text{End}_A(M)$ est de type fini sur A . Par suite

$$\mathcal{H}^0(K) \subset (\pi_* p'_{a,*} \rho'_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}'_a})^{r^*=-1} \subset \pi_* p'_{a,*} \rho'_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}'_a}$$

et

$$H^0(X, \mathcal{H}^0(K) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_D^{\otimes -1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/k}^1) \subset H^0(\tilde{Y}'_a, \rho'^* p'^* \pi^* \Omega_{X/k}^1(-2D))$$

est nul puisque le degré de $\Omega_{X/k}^1(-2D)$ est strictement négatif par hypothèse sur D . □

Remarque. La proposition ci-dessus pourrait aussi se déduire d'un résultat de Fantechi, Göttsche et van Straten (cf. la section A de [F-G-S]).

2.7. Variante endoscopique. Soit $n_1 + n_2 = n$ une partition de n en deux entiers ≥ 1 . On peut considérer les X -schéma en groupes unitaires G_1 et G_2 définis comme G mais après avoir remplacé n par n_1 et n_2 et le X -schéma en groupes produit

$$H = G_1 \times_X G_2.$$

On a des morphismes de Hitchin $f_1 : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathbb{A}_1$ et $f_2 : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathbb{A}_2$ où \mathbb{A}_α est le k -schéma affine naturellement associé au k -espace vectoriel

$$\bigoplus_{i=1}^{n_\alpha} H^0(X, (\mathcal{L}_D)^{\otimes i})$$

pour $\alpha = 1, 2$ et on peut considérer leur produit

$$f_H = \mathcal{M}_H = \mathcal{M}_1 \times_k \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathbb{A}_1 \times_k \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_H.$$

On a un morphisme de f_H dans f

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_H & \xrightarrow{i_{\mathcal{M}}} & \mathcal{M} \\ f_H \downarrow & + & f \downarrow \\ \mathbb{A}_H & \xrightarrow{i} & \mathbb{A} \end{array}$$

qui envoie $((\mathcal{E}_1, \Phi_1, \theta_1), (\mathcal{E}_2, \Phi_2, \theta_2))$ sur

$$(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2, \Phi_1 \oplus \Phi_2, \theta_1 \oplus \theta_2)$$

et (a_1, a_2) sur

$$a = (a_{1,1} + a_{2,1}, a_{1,2} + a_{1,1}a_{2,1} + a_{2,2}, \dots, a_{1,n_1}a_{2,n_2})$$

de sorte que

$$(u^{n_1} + a_{1,1}u^{n_1-1} + \dots + a_{1,n_1})(u^{n_2} + a_{2,1}u^{n_2-1} + \dots + a_{2,n_2}) = (u^n + a_1u^{n-1} + \dots + a_n).$$

En particulier, pour tous points a_1 de \mathbb{A}_1 et a_2 de \mathbb{A}_2 à valeurs dans un k -schéma S la courbe spectrale $Y_{i(a_1,a_2)} \subset \Sigma_S^\circ = S \times_k \Sigma^\circ$ est le diviseur de Cartier relatif (à S) somme des diviseurs de Cartier relatifs Y_{1,a_1} et Y_{2,a_2} où $Y_{\alpha,a_\alpha} \subset \Sigma_S^\circ$ est définie comme $Y_a \subset \Sigma_S^\circ$ après avoir remplacé n par n_α et a par a_α .

La courbe spectrale endoscopique universelle $Y_H \rightarrow \mathbb{A}_H$ est par définition la courbe relative somme disjointes

$$Y_H = Y_1 \times_k \mathbb{A}_2 \amalg \mathbb{A}_1 \times_k Y_2$$

où $Y_1 \subset \mathbb{A}_1 \times_k \Sigma$ et $Y_2 \subset \mathbb{A}_2 \times_k \Sigma$ sont les courbes spectrales universelles pour G_1 et G_2 . D'après ce qui précède, c'est la normalisation partielle

$$Y_H \rightarrow \mathbb{A}_H \times_{\mathbb{A}} Y = Y_1 \times_k \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_1 \times_k Y_2 \subset \mathbb{A}_H \times_k \Sigma$$

qui sépare les composantes $Y_1 \times_k \mathbb{A}_2$ et $\mathbb{A}_1 \times_k Y_2$.

Avec des notations évidentes on a aussi un \mathbb{A}_H -champ de Picard

$$P_H = (\text{Pic}_{Y_H/\mathbb{A}_H})^{\tau^* = (-)^{\otimes -1}} = P_1 \times_k P_2$$

qui agit sur le \mathbb{A}_H -champ \mathcal{M}_H par l'action produit de celle de P_1 sur \mathbb{A}_1 et celle de P_2 sur \mathbb{A}_2 . Le morphisme de f_H dans f est P -équivariant où P agit sur \mathbb{A}_H à travers l'homomorphisme

$$\mathbb{A}_H \times_{\mathbb{A}} P \rightarrow P_H$$

d'image inverse pour la normalisation partielle $Y_H \rightarrow \mathbb{A}_H \times_{\mathbb{A}} Y$.

On a comme précédemment des ouverts

$$\mathbb{A}_H^{\text{lisse}} = \mathbb{A}_1^{\text{lisse}} \times_k \mathbb{A}_2^{\text{lisse}} \subset \mathbb{A}_H^{\text{red}} = \mathbb{A}_1^{\text{red}} \times_k \mathbb{A}_2^{\text{red}} \subset \mathbb{A}_H$$

qui sont non vides dès que $2 \inf(n_1, n_2) \deg(D) \geq 2g + 1$. On a

$$\mathbb{A}_H^{G\text{-red}} := i^{-1}(\mathbb{A}^{\text{red}}) \subset \mathbb{A}_H^{\text{red}}.$$

LEMME 2.7.1. *Le morphisme $i : \mathbb{A}_H \rightarrow \mathbb{A}$ est fini.*

Démonstration. Le morphisme $i : \mathbb{A}_H \rightarrow \mathbb{A}$ est $\mathbb{G}_{m,k}$ -équivariant pour les actions qui font de a_{α,i_α} une coordonnée homogène de degré i_α pour chaque $i_\alpha = 1, \dots, n_\alpha$ et chaque α , et de même de a_i une coordonnée homogène de degré i pour chaque $i = 1, \dots, n$. De plus, le seul point de \mathbb{A}_H d'image (identiquement) nulle dans \mathbb{A} est 0. Par suite, cette application est finie. \square

LEMME 2.7.2. *La restriction $\mathbb{A}_H^{G\text{-red}} \rightarrow \mathbb{A}^{\text{red}}$ de i à $\mathbb{A}_H^{G\text{-red}} \subset \mathbb{A}_H^{\text{red}}$ est un morphisme net.*

Plus précisément, soit $a_H = (a_1, a_2)$ un point de $\mathbb{A}_H = \mathbb{A}_1 \times_k \mathbb{A}_2$ tel que les courbes spectrales Y_{a_1} et Y_{a_2} soient géométriquement intègres et distinctes (dans le cas où $n_1 = n_2$). Alors, l'image du morphisme $i : \mathbb{A}_H \rightarrow \mathbb{A}$ est lisse en l'image a de a_H et le morphisme de \mathbb{A}_H sur son image est un isomorphisme au dessus d'un voisinage de a si $n_1 \neq n_2$ et est étale de degré 2 au dessus d'un voisinage de a si $n_1 = n_2$.

Démonstration. Comme la source et le but de $i : \mathbb{A}_H \rightarrow \mathbb{A}$ sont lisses sur k et que ce morphisme est fini, il suffit de considérer l'application tangente en a_H

$$\begin{aligned} \left(\kappa(a_1) \otimes_k \bigoplus_{i_1=1}^{n_1} H^0(X, (\mathcal{L}_D)^{\otimes i_1}) \right) \oplus \left(\kappa(a_2) \otimes_k \bigoplus_{i_2=1}^{n_2} H^0(X, (\mathcal{L}_D)^{\otimes i_2}) \right) \\ \rightarrow \kappa(a_H) \otimes_k \bigoplus_{i=1}^n H^0(X, (\mathcal{L}_D)^{\otimes i}) \end{aligned}$$

qui est donnée par

$$(\dot{P}_1(u), \dot{P}_2(u)) \mapsto P_1(u)\dot{P}_2(u) + P_2(u)\dot{P}_1(u)$$

où $P_\alpha(u) = u^{n_\alpha} + a_{\alpha,1}u^{n_\alpha-1} + \dots + a_{\alpha,n_\alpha}$ et $\dot{P}_\alpha(u) = \dot{a}_{\alpha,1}u^{n_\alpha-1} + \dots + \dot{a}_{\alpha,n_\alpha}$ pour $\alpha = 1, 2$. Mais cette application est injective car, au point générique de $\kappa_{a_H} \otimes_k X$, les polynômes $P_1(u)$ et $P_2(u)$ sont premiers entre eux. \square

2.8. *L'ouvert elliptique.* On dira qu'un S -point a de \mathbb{A}^{red} est une caractéristique *elliptique* si, pour tout point géométrique s de S le revêtement double $Y'_{a(s)} \rightarrow Y_{a(s)}$ induit un isomorphisme de l'ensemble des composantes irréductibles de $Y'_{a(s)}$ sur celui de $Y_{a(s)}$. Il revient au même de dire que τ agit trivialement sur l'ensemble $\text{Irr}(Y'_{a(s)})$ des composantes irréductibles de $Y'_{a(s)}$. La notion d'ellipticité utilisée ici est une notion géométrique, qui implique la notion d'ellipticité usuelle. De plus, un élément elliptique est pour nous automatiquement régulier.

LEMME 2.8.1. *Les caractéristiques elliptiques forment un ouvert dense \mathbb{A}^{ell} de \mathbb{A}^{red} .*

Démonstration. L'ensemble des caractéristiques elliptiques étant constructible, il suffit de vérifier que la propriété elliptique est préservée par généralisation. Soit $a : S \rightarrow \mathbb{A}^{\text{red}}$ un morphisme où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, de point spécial géométrique \bar{s} et de point générique géométrique $\bar{\eta}$. Supposons que l'image de \bar{s} est elliptique, il s'agit de démontrer que l'image de $\bar{\eta}$ est aussi elliptique.

Par définition, $a(\bar{s})$ est elliptique si et seulement si τ agit trivialement sur l'ensemble des composantes irréductibles $\text{Irr}(Y'_{a(\bar{s})})$. Pour démontrer que $a(\bar{\eta})$ est elliptique, il suffit donc de démontrer qu'il existe une application

τ -équivalente surjective

$$\text{Irr}(Y'_{a(\bar{s})}) \twoheadrightarrow \text{Irr}(Y'_{a(\bar{\eta})}).$$

En effet, la surjectivité de cette application force τ à agir trivialement sur $\text{Irr}(Y'_{a(\bar{\eta})})$.

Soit $Y'_S{}^\circ$ l'ouvert maximal de lissité de $Y'_S = S \times_{\mathbb{A}} Y'$ sur S . Puisque Y'_S est une S -courbe plate à fibres géométriquement réduites, on a $\text{Irr}(Y'_{a(s)}) = \pi_0(Y'_{a(s)}{}^\circ)$ et $\text{Irr}(Y'_{a(\eta)}) = \pi_0(Y'_{a(\eta)}{}^\circ)$. De plus, d'après le lemme 15.5.6 de [EGA IV], l'application $\pi_0(Y'_{a(\eta)}{}^\circ) \rightarrow \pi_0(Y'_S{}^\circ)$ qui à une composante connexe associe son adhérence plate dans $Y'_S{}^\circ$, est bijective.

Considérons maintenant l'application $\pi_0(Y'_{a(s)}{}^\circ) \rightarrow \pi_0(Y'_S{}^\circ)$ qui associe à une composante connexe de $Y'_{a(s)}{}^\circ$ l'unique composante connexe de $Y'_S{}^\circ$ qui la contient. Composée avec l'inverse de la bijection $\pi_0(Y'_{a(\eta)}{}^\circ) \xrightarrow{\sim} \pi_0(Y'_S{}^\circ)$, cette application définit une application $\pi_0(Y'_{a(s)}{}^\circ) \rightarrow \pi_0(Y'_{a(\eta)}{}^\circ)$.

Enfin, pour construire l'application cherchée $\text{Irr}(Y'_{a(\bar{s})}) \rightarrow \text{Irr}(Y'_{a(\bar{\eta})})$, il ne reste plus qu'à remplacer S par le normalisé S' de S dans une extension finie η' de η telle que $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta')$ agisse trivialement sur $\text{Irr}(Y'_{a(\bar{\eta})})$. L'application ainsi construite est clairement compatible à l'action de τ .

La surjectivité de $\text{Irr}(Y'_{a(\bar{s})}) \rightarrow \text{Irr}(Y'_{a(\bar{\eta})})$ résulte de la propriété de Y'_S sur S . □

L'ouvert \mathbb{A}^{ell} est non vide car il contient l'ouvert non vide $\mathbb{A}^{\text{lisse}}$ où la courbe spectrale Y est lisse. En effet, au-dessus de ce lieu, les courbes Y et Y' qui sont lisses et à fibres géométriquement connexes, ont toutes leurs fibres géométriques irréductibles.

Remarquons cependant qu'il peut arriver que Y_a soit irréductible sans que le revêtement étale Y'_a ne le soit.

LEMME 2.8.2. *Au-dessus de l'ouvert \mathbb{A}^{ell} , le morphisme $P \rightarrow \mathbb{A}^{\text{red}}$ est de type fini. De plus, pour tout point géométrique a de \mathbb{A}^{ell} , le groupe des composantes connexes $\pi_0(P_a)$ de P_a est canoniquement isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\text{Irr}(Y_a)}$ où $\text{Irr}(Y_a)$ est l'ensemble des composantes irréductibles de Y_a .*

Soit C un diviseur de Cartier dans l'ouvert de lissité de Y'_a et considérons le fibré en droites $\mathcal{O}_{Y'_a}(C - \tau(C))$, muni de la structure unitaire évidente. Le point ainsi défini dans P_a est dans la composante neutre de P_a si et seulement si le degré de la restriction de C à chaque composante irréductible de Y'_a est pair.

Démonstration. Soient a un point géométrique de \mathbb{A}^{ell} , Y_a la courbe spectrale associée et $\pi_a : Y'_a \rightarrow Y_a$ son revêtement étale double. Au-dessus de Y_a , on a une suite exacte de faisceaux en groupes

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_{m, Y_a} \rightarrow (\pi_a)_*(\mathbb{G}_{m, Y'_a}) \xrightarrow{\beta} (\pi_a)_*(\mathbb{G}_{m, Y'_a})^{\tau^* = (-)^{-1}} \rightarrow 1$$

où β est le morphisme «anti-norme» donné sur les sections locales par $\beta(\xi) = \xi\tau(\xi)^{-1}$.

Par passage à la cohomologie on en déduit une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow H^0(Y_a, \mathcal{O}_{Y_a}^\times) \rightarrow H^0(Y'_a, \mathcal{O}_{Y'_a}^\times) \rightarrow H^0(Y'_a, \mathcal{O}_{Y'_a}^\times)^{\tau^* = (-)^{-1}} \rightarrow \\ \rightarrow \text{Pic}(Y_a) \longrightarrow \text{Pic}(Y'_a) \longrightarrow P_a \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

et donc une suite exacte à droite

$$\pi_0(\text{Pic}(Y_a)) \rightarrow \pi_0(\text{Pic}(Y'_a)) \rightarrow \pi_0(P_a) \rightarrow 0.$$

Puisque a est elliptique, l'application $\text{Irr}(Y'_a) \rightarrow \text{Irr}(Y_a)$ induite par π_a est bijective. On peut donc identifier $\pi_0(\text{Pic}(Y_a))$ et $\pi_0(\text{Pic}(Y'_a))$ à $\mathbb{Z}^{\text{Irr}(Y_a)}$, et la flèche $\pi_0(\text{Pic}(Y_a)) \rightarrow \pi_0(\text{Pic}(Y'_a))$ est alors la multiplication par 2 dans $\mathbb{Z}^{\text{Irr}(Y_a)}$. On en déduit que $\pi_0(P_a) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\text{Irr}(Y_a)}$.

Soit C un diviseur de Cartier comme dans l'énoncé. L'homomorphisme $\text{Pic}(Y'_a) \rightarrow P_a$ qui se déduit de β , envoie le fibré inversible $\mathcal{O}_{Y'_a}(C)$ sur le fibré inversible $\mathcal{O}_{Y'_a}(C - \tau(C))$ muni de la structure unitaire évidente. La description de la flèche induite sur les π_0 montre que $\mathcal{O}_{Y'_a}(C - \tau(C))$ est dans la composante neutre P_a^0 si et seulement si le degré de C sur chaque composante irréductible de Y'_a est pair. \square

Remarque. L'ouvert $\mathbb{A}^{\text{ell,int}} \subset \mathbb{A}^{\text{ell}} \subset \mathbb{A}^{\text{red}}$ des caractéristiques a telles que Y_a et Y'_a soient intègres est l'ouvert complémentaire dans \mathbb{A}^{ell} de la réunion des $\mathbb{A}^{\text{ell}} \cap i(\mathbb{A}_{U(n_1) \times U(n_2)})$ pour toutes les partitions non triviales $n = n_1 + n_2$.

LEMME 2.8.3. *Il existe une application $\pi_0(\mathcal{M}_a) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ équivariante pour l'action de $\pi_0(P_a)$ sur $\pi_0(\mathcal{M}_a)$ induite par celle de P_a sur \mathcal{M}_a et pour l'action de $\pi_0(P_a) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\text{Irr}(Y_a)}$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ via la somme.*

Démonstration. On a une application canonique de l'espace des fibrés unitaires dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie comme suit. À $(\mathcal{E}, \Phi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \tau^*\mathcal{E})$ on associe le fibré inversible $\bigwedge^n \mathcal{E}$ sur X' muni de la structure unitaire $\bigwedge^n \Phi$. D'après le lemme précédent l'espace de module de ces fibrés inversibles unitaires a deux composantes connexes. \square

L'énoncé suivant est crucial pour notre travail. Il est pour l'essentiel un cas particulier du théorème II.4 de [Fal]. Une partie des arguments utilisés figure aussi dans [Est].

PROPOSITION 2.8.4. (i) *La restriction \mathcal{M}^{ell} de \mathcal{M} au-dessus de l'ouvert $\mathbb{A}^{\text{ell}} \subset \mathbb{A}$ est un champ de Deligne-Mumford.*

(ii) *Le morphisme de champs de Deligne-Mumford $f^{\text{ell}} : \mathcal{M}^{\text{ell}} \rightarrow \mathbb{A}^{\text{ell}}$ induit par le morphisme de Hitchin est propre.*

Démonstration. Soit \bar{k} une clôture algébrique de k . Pour l'assertion (i) on se contentera de démontrer que les automorphismes de tout \bar{k} -point de l'ouvert \mathcal{M}^{ell} est fini.

Il résulte de la démonstration de la proposition 2.5.2 que l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes d'un objet $(\mathcal{E}, \Phi, \theta)$ de $\mathcal{M}(\bar{k})$ de caractéristique a est

$$H^0(\bar{k} \otimes_k X, \mathcal{H}^0(K)) \subset H^0(\bar{k} \otimes_k \tilde{Y}'_a, \mathcal{O}_{\bar{k} \otimes_k \tilde{Y}'_a})^{\tau^* = -1}$$

avec les notations de cette démonstration. Mais si a est dans l'ouvert \mathbb{A}^{ell} , τ^* agit trivialement sur $H^0(\bar{k} \otimes_k \tilde{Y}'_a, \mathcal{O}_{\bar{k} \otimes_k \tilde{Y}'_a})$. Par conséquent cette algèbre de Lie est nulle et le groupe des automorphismes de $(\mathcal{E}, \Phi, \theta)$ est fini.

Pour l'assertion (ii) nous procéderons en trois temps en montrant tout d'abord que le morphisme f^{ell} est de type fini, puis qu'il satisfait la partie «existence» du critère valuatif de propreté, et enfin la partie «unicité» de ce même critère.

Soit $a \in \mathbb{A}^{\text{ell}}(\bar{k})$. Le morphisme d'oubli $f^{-1}(a) = \mathcal{M}_a \rightarrow \overline{\text{Pic}}_{Y'_a/\bar{k}}$, $(\mathcal{F}, \iota) \mapsto \mathcal{F}$, est représentable de type fini: sa fibre en un $\mathcal{O}_{Y'_a}$ -Module sans torsion \mathcal{F} de rangs génériques 1 est un fermé de $\mathcal{I}som_{\mathcal{O}_{Y'_a}}(\mathcal{F}, \tau^* \mathcal{F}^\vee)$. Pour démontrer que \mathcal{M}_a est de type fini il suffit donc de voir que ce morphisme d'oubli se factorise à travers un ouvert de type fini de $\overline{\text{Pic}}_{Y'_a/\bar{k}}^{(n-1)\deg(D)} \subset \overline{\text{Pic}}_{Y'_a/\bar{k}}$. On rappelle que le degré de $\omega_{Y'_a/X}$ est égal à $2(n-1)\deg(D)$ et donc que pour tout $(\mathcal{F}, \iota) \in \mathcal{M}_a$, \mathcal{F} est de degré $(n-1)\deg(D)$.

De tels ouverts sont obtenus en bornant les degrés des restrictions de \mathcal{F} aux composantes irréductibles de Y'_a . Plus précisément, soit

$$\nu : Y_a^\dagger = \coprod_{C \in \text{Irr}(Y_a)} C \rightarrow Y_a$$

la normalisation partielle qui consiste à séparer les composantes irréductibles C de Y_a sans les modifier. Alors,

$$\nu' : Y_a^{\dagger'} = \coprod_{C \in \text{Irr}(Y_a)} X' \times_X C \rightarrow Y_a'$$

est aussi la normalisation partielle qui consiste à séparer les composantes irréductibles $C' = X' \times_X C$ de Y_a' sans les modifier, puisque a est elliptique. Pour tout \bar{k} -point \mathcal{F} de $\overline{\text{Pic}}_{Y'_a/\bar{k}}^{(n-1)\deg(D)}$ notons \mathcal{G} le plus grand quotient sans torsion de $\nu'^* \mathcal{F}$ et $d_C(\mathcal{F}) + \frac{1}{2} \deg(\omega_{C/X})$ le degré de la restriction \mathcal{G}_C de \mathcal{G} à la composante connexe C' de $Y_a^{\dagger'}$. On a une flèche injective d'adjonction

$$\mathcal{F} \hookrightarrow \nu'_* \mathcal{G}$$

dont le conoyau est annulé par le conducteur \mathfrak{a} de Y_a^\dagger/Y_a , c'est-à-dire l'annulateur de $\nu_* \mathcal{O}_{Y_a^\dagger}/\mathcal{O}_{Y_a}$. On a donc

$$\mathfrak{a} \nu'_* \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \nu'_* \mathcal{G}.$$

On en déduit que, pour toute famille d'entiers $(e_C)_{C \in \text{Irr}(Y_a)}$, les \mathcal{F} de degré $(n-1) \deg(D)$ tels que $d_C(\mathcal{F}) \geq e_C$ quel que soit $C \in \text{Irr}(Y_a)$ forment une famille limitée.

Maintenant, si (\mathcal{F}, ι) est un \bar{k} -point de \mathcal{M}_a , on a

$$\tau^*((\nu'_*\mathcal{G})^\vee) \subset \tau^*(\mathcal{F}^\vee) \cong \mathcal{F} \subset \nu'_*\mathcal{G}.$$

On en déduit que $d_C(\mathcal{F}) \geq 0$ pour chaque $C \in \text{Irr}(Y_a)$. Le champ de Deligne-Mumford \mathcal{M}_a est donc bien de type fini. Nous laissons au lecteur le soin de généraliser cet argument pour en déduire que f^{ell} est de type fini.

Considérons maintenant le critère valuatif de propreté. Soit S un trait strictement hensélien de point fermé s et de point générique η . Soit $a : S \rightarrow \mathbb{A}^{\text{ell}}$ un S -point de \mathbb{A}^{ell} . On a la S -courbe spectrale $Y_S \rightarrow S$, et son revêtement double étale $Y'_S \rightarrow Y_S$. On a aussi le revêtement fini $p'_S : Y'_S \rightarrow Y_S \rightarrow X_S$. Soit $(\mathcal{F}_\eta, \iota_\eta)$ un $\kappa(\eta)$ -point de \mathcal{M}_η , c'est-à-dire une $\mathcal{O}_{Y'_\eta}$ -module cohérent sans torsion de rang générique 1 muni d'une structure unitaire ι_η . On veut prolonger ce point en une section (\mathcal{F}, ι) de $\mathcal{M}_S \rightarrow S$ quitte à remplacer S par un revêtement fini ramifié. Soit U_s l'ouvert de $X_s = s \times_k X$ au-dessus duquel Y_s est étale et $V'_s \subset Y_s$ l'image réciproque de U_s par p'_s . Alors, V'_s est réunion disjointe d'ouverts $V'_{s,C}$ indexés par les composantes irréductibles de Y'_s ou ce qui revient au même les composantes irréductibles C de Y'_s puisque $a(s)$ est elliptique. Les réunions $U = X_\eta \cup U_s \subset X_S$ et $V'_S = Y'_\eta \cup V'_s \subset Y'_S$ sont des ouverts denses, et chaque $V'_{s,C}$ est un diviseur de Cartier sur V' .

On commence par prolonger $(\mathcal{F}_\eta, \iota_\eta)$ à V' . Pour cela on choisit un prolongement de \mathcal{F}_η en un $\mathcal{O}_{V'}$ -module cohérent \mathcal{G} sans torsion de rangs génériques 1 tel que ι_η se prolonge en un homomorphisme $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \tau^*\mathcal{G}^\vee$ nécessairement injectif. On a alors

$$\tau^*\mathcal{F}_{V'}^\vee = \mathcal{G} \left(\sum_C m_C V'_{s,C} \right).$$

Quitte à ramifier S en extrayant une racine carrée de l'uniformisante de S , on peut supposer que les m_C sont tous pairs et alors

$$\mathcal{F}_{V'} = \mathcal{G} \left(\sum_C \frac{m_C}{2} V'_{s,C} \right)$$

muni de la structure unitaire $\iota_{V'}$ induite par ψ répond à la question.

Maintenant on prend pour (\mathcal{F}, ι) l'image directe par l'immersion ouverte $V' \hookrightarrow Y'$ de $(\mathcal{F}_{V'}, \iota_{V'})$. Pour voir que \mathcal{F} est plat sur S et fibre à fibre sans torsion de rangs génériques 1, il suffit de remarquer que $(p'_S)_*\mathcal{F}$ est l'image directe par l'immersion ouverte $U \hookrightarrow X_S$ de sa restriction à U , et est donc un fibré vectoriel puisque X est lisse sur k et que $X_S - U$ est de codimension 2 dans X_S . On a donc démontré la partie «existence» du critère valuatif de propreté.

Pour conclure il ne reste plus qu'à traiter la partie «unicité» de ce critère valuatif. Soient donc (\mathcal{F}, ι) et (\mathcal{F}^1, ι^1) deux sections de $\mathcal{M}_S \rightarrow S$ et $\varphi_\eta :$

$(\mathcal{F}_\eta, \iota_\eta) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}_\eta^1, \iota_\eta^1)$ un isomorphisme entre leurs restrictions à Y'_η . Il s'agit de prolonger φ_η à Y'_S tout entier.

Comme précédemment, il suffit de prolonger φ à l'ouvert $V' \subset Y'_S$. En se localisant au point générique de chaque composante connexe $V'_{s,C}$ de V'_S , on est ramené à vérifier l'assertion suivante. Soient R'/R une extension étale de degré 2 d'anneaux de valuations discrètes, K'/K l'extension correspondantes entre les corps des fractions, N et N^1 deux K' -espace vectoriel de dimension 1 munis de structures unitaires relativement à l'extension quadratique K'/K et $M \subset N$ et $M^1 \subset N^1$ deux R' -réseaux auto-duaux relativement à ces structures unitaires, alors tout isomorphisme unitaire $\psi : N \xrightarrow{\sim} N^1$ envoie M sur M^1 .

On peut supposer que $M = M^1 = R'$, de sorte que $N = N^1 = K'$ avec des structures unitaires données par les formes hermitiennes αx^*y et $\alpha^1 x^*y$ pour $\alpha, \alpha^1 \in R^\times$. Alors ψ est donné par $x \rightarrow \beta'x$ avec $\beta' \in K'^\times$ tel que $\alpha = \beta'\beta'^*\alpha'$ et donc tel que $\beta' \in R^\times$, d'où l'assertion, et la partie (ii) de la proposition. \square

2.9. *La «glissade»*. L'espace de Hitchin \mathbb{A}_H du groupe endoscopique H est un produit $\mathbb{A}_H = \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ où pour tous $\alpha \in \{1, 2\}$, \mathbb{A}_α est l'espace affine associé au k -espace vectoriel

$$\bigoplus_{i=1}^{n_\alpha} H^0(X, (\mathcal{L}_D)^{\otimes i}).$$

Le k -schéma en groupes vectoriels $\text{Vect}(\Sigma/X)$ défini par le k -espace vectoriel $H^0(X, \mathcal{L}_D)$ agit par translation sur la surface réglée $\Sigma = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus (\mathcal{L}_D)^{\otimes -1}) \rightarrow X$ en préservant la section infinie. L'action de $\text{Vect}(\Sigma/X)$ se relève au fibré en droites $\mathcal{O}_\Sigma(n_\alpha)$ et donc induit une action de $\text{Vect}(\Sigma/X)$ sur $H^0(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma(n_\alpha)) = \bigoplus_{i=0}^{n_\alpha} H^0(X, (\mathcal{L}_D)^{\otimes i})$ qui est donnée par

$$v \cdot (a_{\alpha,1}, \dots, a_{\alpha,n_\alpha}) = (b_{\alpha,1}(v), \dots, b_{\alpha,n_\alpha}(v))$$

où $b_{\alpha,1}(v), \dots, b_{\alpha,n_\alpha}(v)$ sont définis par

$$u^{n_\alpha} + b_{\alpha,1}(v)u^{n_\alpha-1} + \dots + b_{\alpha,n_\alpha}(v) = (u+v)^{n_\alpha} + a_{\alpha,1}(u+v)^{n_\alpha-1} + \dots + a_{\alpha,n_\alpha}$$

pour tout $v \in \text{Vect}(\Sigma/X)$.

Cette action de $\text{Vect}(\Sigma/X)$ sur \mathbb{A}_α se relève par construction à la courbe spectrale universelle $Y_\alpha \rightarrow \mathbb{A}_\alpha$ et se relève donc aussi en une action sur la fibration de Hitchin $f_\alpha : \mathcal{M}_{n_\alpha} \rightarrow \mathbb{A}_\alpha$ de $U(n_\alpha)$.

Par produit direct, on a donc une action de $\text{Vect}(\Sigma/X) \times_k \text{Vect}(\Sigma/X)$ sur la fibration de Hitchin $f_H : \mathcal{M}_H \rightarrow \mathbb{A}_H$ du groupe endoscopique.

Soit $\mathbb{A}_{H,\mathfrak{h}}^{G\text{-red}}$ l'ouvert de $\mathbb{A}_H^{G\text{-red}}$ dont les points géométriques sont les points géométriques (a_1, a_2) de $\mathbb{A}_H^{G\text{-red}}$ tels que les deux courbes spectrales Y_{a_1} et Y_{a_2} tracées sur Σ se coupent transversalement et de plus, tels qu'en tout point z de leur intersection, Y_{a_1} et Y_{a_2} soient étales sur $\kappa(a_1, a_2) \otimes_k X$.

PROPOSITION 2.9.1. *L'ouvert*

$$\begin{aligned} & \{((v_1, v_2), (a_1, a_2)) \mid (v_1 \cdot a_1, v_2 \cdot a_2) \in \mathbb{A}_{H, \mathfrak{h}}^{G\text{-red}}\} \\ & \quad \subset \text{Vect}(\Sigma/X) \times_k \text{Vect}(\Sigma/X) \times_k \mathbb{A}_H^{G\text{-red}} \end{aligned}$$

image réciproque de l'ouvert $\mathbb{A}_{H, \mathfrak{h}}^{G\text{-red}} \subset \mathbb{A}_H$ par le morphisme d'action

$$\text{Vect}(\Sigma/X) \times_k \text{Vect}(\Sigma/X) \times_k \mathbb{A}_H \rightarrow \mathbb{A}_H$$

s'envoie surjectivement sur $\mathbb{A}_H^{G\text{-red}}$ par la projection canonique

$$\text{Vect}(\Sigma/X) \times_k \text{Vect}(\Sigma/X) \times_k \mathbb{A}_H^{G\text{-red}} \rightarrow \mathbb{A}_H^{G\text{-red}}.$$

En particulier $\mathbb{A}_{H, \mathfrak{h}}^{G\text{-red}}$ est non vide.

Démonstration. Soit $a = (a_1, a_2)$ un point géométrique de $\mathbb{A}_H^{G\text{-red}}$. Comme $p > n$, le diviseur de Cartier effectif $Y_{a_1} + Y_{a_2}$ de $\kappa(a) \otimes_k \Sigma$ est génériquement étale sur $\kappa(a) \otimes_k X$. Il existe donc un ouvert dense U de $\kappa(a) \otimes_k X$ au-dessus duquel Y_{a_1} et Y_{a_2} sont étales et ne se rencontrent pas.

Soit $\tilde{U} \rightarrow U$ un revêtement fini étale qui déploie complètement les restrictions finies étales de Y_{1, a_1} et Y_{2, a_2} à U . Pour $\alpha = 1, 2$, on a alors des sections

$$b_{\alpha, 1}, \dots, b_{\alpha, n_\alpha} \in H^0(\tilde{U}, \mathcal{L}_D)$$

telles que

$$u^{n_\alpha} + (a_{\alpha, 1} | \tilde{U}) u^{n_\alpha - 1} + \dots + (a_{\alpha, n_\alpha} | \tilde{U}) = \prod_{i_\alpha=1}^{n_\alpha} (u - b_{\alpha, i_\alpha}).$$

Soit $v \in \kappa(a) \otimes_k H^0(X, \mathcal{L}_D)$ qui ne s'annule en aucun point de $\kappa(a) \otimes_k (X - U)$. Alors, v induit une base, notée encore v , de la fibre $\mathcal{L}_{D, K}$ de \mathcal{L}_D au point générique $\text{Spec}(K)$ de $\kappa(a) \otimes_k X$ et les quotients $b_{\alpha, i_\alpha}/v$ sont des éléments bien définis du corps des fonctions $\tilde{K} = \kappa(a)(\tilde{U})$ de la courbe \tilde{U} , éléments dont on peut prendre les différentielles

$$d(b_{\alpha, i_\alpha}/v) \in \Omega_{\tilde{K}/\kappa(a)}^1.$$

Choisissons arbitrairement $f \in K$ dont la différentielle $df \in \Omega_{K/\kappa(a)}^1$ est non nulle et tel que

$$v' = fv \in \kappa(a) \otimes_k H^0(X, \mathcal{L}_D) \subset \mathcal{L}_{D, K}.$$

Il existe de tels $f = v'/v$ d'après le théorème de Riemann-Roch puisque $\deg(\mathcal{L}_D) \geq 2g + 2$.

Montrons alors qu'il existe c et c' dans $\kappa(a)$ tels que $((cv + c'v') \cdot a_1, a_2)$ soit un point géométrique de $\mathbb{A}_{H, \mathfrak{h}}^{G\text{-red}}$, ce qui terminera la démonstration de la proposition.

Il existe $c' \in \kappa(a)$ tel que les expressions

$$d((b_{1,i_1} - c'v')/v) - d(b_{2,i_2}/v) \in \Omega_{\tilde{K}/\kappa(a)}^1$$

soient toutes non nulles et que v ne s'annule en aucune des images dans $\kappa(a) \otimes_k X$ des points d'intersection de $Y_{c'v'.a_1}$ et Y_{a_2} . Pour un tel c' notons $U_{c'}$ un ouvert dense de U tel que les fonctions rationnelles $(b_{1,i_1} - c'v')/v$ et b_{2,i_2} soient toutes régulières sur l'image inverse $\tilde{U}_{c'}$ de $U_{c'}$ dans \tilde{U} et que les différences

$$d((b_{1,i_1} - c'v')/v) - d(b_{2,i_2}/v) \in \Omega_{\tilde{U}_{c'}/\kappa(a)}^1$$

ne s'annulent en aucun point de $\tilde{U}_{c'}$. Pour tout $c \in \kappa(a)$ les courbes $Y_{(cv+c'v').a_1}$ et Y_{a_2} sont étales au-dessus de $U_{c'}$ et s'y coupent transversalement.

Il ne reste plus qu'à choisir c de telle sorte que les courbes $Y_{(cv+c'v').a_1}$ et Y_{a_2} ne se coupent pas au-dessus de l'ensemble fini $\kappa(a) \otimes_k X - U_{c'}$. C'est possible puisqu'au-dessus de chaque point x de $\kappa(a) \otimes_k X - U_{c'}$, cette condition n'écarte qu'un nombre fini de valeurs pour c , voire même aucune si $v(x) = 0$, Y_{a_1} et Y_{a_2} ne se coupant pas au-dessus d'un zéro de v . \square

3. Un énoncé global

3.1. *Un point particulier de \mathbb{A}_H .* On suppose dorénavant que la courbe X admet un point x_∞ rationnel sur $k = \mathbb{F}_q$ au-dessus duquel le revêtement double étale $X' \rightarrow X$ est décomposé.

Comme dans le chapitre 2, on considère le schéma en groupes unitaires G sur X à n variables et son groupe endoscopique $H = G_1 \times_X G_2$ où G_1 et G_2 sont les schémas en groupes unitaires sur X en n_1 et n_2 variables. Toujours comme dans le chapitre 2, une fois fixé le diviseur effectif D de degré $\geq g+1$ sur X , on a la fibration de Hitchin $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{A}$ et sa variante endoscopique $\mathcal{M}_H \rightarrow \mathbb{A}_H$ qu'on va aussi noter $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{A}_H$. On a aussi les courbes spectrales $Y \rightarrow \mathbb{A}$ et $Y_H \rightarrow \mathbb{A}_H$.

Fixons maintenant un point $a = (a_1, a_2)$, rationnel sur $k = \mathbb{F}_q$, de l'espace de Hitchin endoscopique \mathbb{A}_H . On a donc des courbes spectrales Y_{a_1} , Y_{a_2} et $Y_a = Y_{a_1} + Y_{a_2}$ tracées sur la surface $\Sigma = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus (\mathcal{L}_D)^{\otimes -1})$.

Faisons les hypothèses sur a suivantes:

- Y_{a_1} et Y_{a_2} sont distinctes, géométriquement irréductibles et génériquement étales au-dessus de X ;
- les images inverses Y'_{a_1} et Y'_{a_2} de Y_{a_1} et Y_{a_2} dans le revêtement double étale $Y'_a = X' \times_X Y_a$ de Y_a sont aussi géométriquement irréductibles; en particulier, l'image $i(a)$ de a dans \mathbb{A} est dans l'ouvert \mathbb{A}^{ell} (cf. la section (2.8));

- le morphisme $Y_a \rightarrow X$ est étale au-dessus du point $x_\infty \in X(k)$ et pour chaque $\alpha \in \{1, 2\}$, il existe au moins un point de Y_{a_α} rationnel sur k au-dessus de x_∞ .

3.2. *Actions du groupe discret et pureté.* Notons R l'hensélisé de \mathbb{A} en l'image de a par le morphisme canonique $i : \mathbb{A}_H \rightarrow \mathbb{A}$ et S l'hensélisé de \mathbb{A}_H en a . Puisque a est elliptique, on a $R \subset \mathbb{A}^{\text{ell}}$. Il résulte des lemmes 2.7.1 et 2.7.2 que le morphisme induit par i de S dans R est une immersion fermée. On identifie dans la suite S à son image par cette immersion fermée, de sorte que $S \subset R$. On note s le point fermé commun de S et R ; son corps résiduel $\kappa(s)$ est égal à $k = \mathbb{F}_q$.

Notons par un indice R le changement de base par le morphisme $R \rightarrow \mathbb{A}^{\text{red}} \subset \mathbb{A}$ et par un indice S le changement de base par le morphisme $S \rightarrow \mathbb{A}_H^{G\text{-red}} \subset \mathbb{A}_H$. On note par un indice s la fibre en s (fibre spéciale) des objets au-dessus de R ou S .

On a donc la courbe spectrale relative $Y_R \rightarrow R$ et le morphisme fini et plat $p_R : Y_R \rightarrow R \times_k X$ de degré n . On a de plus le revêtement double étale $Y'_R \rightarrow Y_R$. La fibre spéciale $Y_s = Y_a$ se décompose en réunion de composantes géométriquement irréductibles $Y_s = Y_{a_1} \cup Y_{a_2}$. De même on a $Y'_s = Y'_{a_1} \cup Y'_{a_2}$ où les Y'_{a_α} sont aussi géométriquement irréductibles.

La pré-image $p_R^{-1}(x_\infty)$ de $R \times_k \{x_\infty\}$ par le morphisme fini plat $p_R : Y_R \rightarrow R \times_k X$ est un R -schéma fini et plat de degré n . Sa fibre spéciale étant supposée réduite et k étant parfait, $p_R^{-1}(x_\infty)$ est donc fini étale de degré n au-dessus de R . De même la pré-image $p'_R^{-1}(x_\infty)$ de $R \times_k \{x_\infty\}$ par le morphisme fini plat $p'_R : Y'_R \rightarrow R \times_k X$ est un R -schéma fini étale de degré $2n$.

Pour chaque $\alpha \in \{1, 2\}$, il existe des k -points de Y'_{a_α} au-dessus de x_∞ et on en choisit arbitrairement un que l'on note $y'_\alpha \in Y'_{a_\alpha}(k)$; le point y'_α s'étend de façon unique en une section

$$y'_{\alpha,R} : R \rightarrow p'^{-1}_R(R).$$

Les sections $y'_{\alpha,R}$ induisent un homomorphisme de R -champs de Picard

$$R \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Pic}_{Y'_R/R}.$$

Plus précisément, ce morphisme est donné par

$$(d_1, d_2) \mapsto \mathcal{O}_{Y'_R}(d_1[y'_{1,R}] + d_2[y'_{2,R}]).$$

En le composant avec l'homomorphisme « anti-norme » (voir la preuve du lemme 2.8.2)

$$\text{Pic}_{Y'_R/R} \rightarrow P_R, \quad \xi \mapsto \xi\tau(\xi)^{-1},$$

on obtient un homomorphisme

$$\rho : R \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow P_R$$

qui est donné concrètement par

$$(d_1, d_2) \mapsto \mathcal{O}_{Y'_R}(d_1[y'_{1,R}] - d_1[\tau(y'_{1,R})] + d_2[y'_{2,R}] - d_2[\tau(y'_{2,R})]),$$

le fibré inversible $\mathcal{O}_{Y'_R}(d_1[y'_{1,R}] - d_1[\tau(y'_{1,R})] + d_2[y'_{2,R}] - d_2[\tau(y'_{2,R})])$ étant muni de sa structure unitaire évidente.

Soit b un point géométrique de R et $\rho_b : \mathbb{Z}^2 \rightarrow P_b$ la fibre de ρ en b . Considérons l'homomorphisme composé

$$\pi_0(\rho_b) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow P_b \rightarrow \pi_0(P_b)$$

dont le but est $\pi_0(P_b) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{J_b}$ où $J_b := \text{Irr}(Y_b)$, d'après le lemme 2.8.2. Pour $\alpha \in \{1, 2\}$ notons $j_b(\alpha) \in J_b$ l'indice de l'unique composante irréductible $Y'_{b, j_b(\alpha)}$ de Y'_b qui contient le point $y'_{\alpha, R}(b)$. Alors $\pi_0(\rho_b)$ est donné par

$$(d_1, d_2) \mapsto \left(\sum_{\alpha \in \{1, 2\}, j_b(\alpha)=j} \bar{d}_\alpha \right)_{j \in J_b}$$

où \bar{d}_α est la classe de d_α modulo 2, de nouveau d'après le lemme 2.8.2. En particulier $\pi_0(\rho_b) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \pi_0(P_b)$ se factorise à travers $\mathbb{Z}^2 \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

PROPOSITION 3.2.1. *Pour $\alpha = 1, 2$, considérons le caractère $\kappa_\alpha : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{\pm 1\}$ défini par*

$$\kappa_\alpha(d_1, d_2) = (-1)^{d_\alpha}.$$

Soit b un point géométrique de l'hensélisé R de a dans \mathbb{A} . Pour que κ_α se factorise à travers l'homomorphisme $\pi_0(\rho_b) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \pi_0(P_b)$ défini plus haut, il est nécessaire que $b \in S \subset R$.

Démonstration. Le caractère κ_α se factorise à travers $\pi_0(\rho_b)$ si et seulement si l'application $j_b : \{1, 2\} \rightarrow J_b$ est injective. Faisons donc cette hypothèse.

Pour démontrer que $b \in S$ il suffit d'après 2.5.3 de démontrer que, pour $\alpha \in \{1, 2\}$ le revêtement fini et plat $p_{b, j_b(\alpha)} : Y_{b, j_b(\alpha)} \rightarrow b \times_k X$ est de degré n_α , c'est-à-dire que le nombre de points de la fibre $p_{b, j_b(\alpha)}^{-1}(b, x_\infty)$ est égal à n_α .

Soit \bar{R} l'hensélisé strict de R relatif à la clôture algébrique de $\kappa(s) = k$ dans $\kappa(b)$, \bar{s} son point fermé et \bar{b} le relèvement naturel de b à \bar{R} . On a n sections distinctes $\bar{R} \rightarrow Y_{\bar{R}}$ au-dessus du point x_∞ . Notons cet ensemble de sections $p_{\bar{R}}^{-1}(x_\infty)$. On a donc une application canonique

$$\mu_s : p_{\bar{R}}^{-1}(x_\infty) \rightarrow \{1, 2\}$$

qui associe à une section $y \in p_{\bar{R}}^{-1}(x_\infty)$ l'unique indice $\alpha \in \{1, 2\}$ tel que $y(\bar{s})$ soit un point géométrique de $Y_{s, \alpha}$. De même, on a l'application

$$\mu_b : p_{\bar{R}}^{-1}(x_\infty) \rightarrow J_b$$

qui associe à une section $y \in p_{\bar{R}}^{-1}(x_\infty)$ l'unique indice $j \in J_b$ tel que $y(\bar{b})$ soit un point géométrique de $Y_{b, j}$.

Il suffit de démontrer que $\mu_b = j_b \circ \mu_s$ car alors

$$|p_{b,j_b(\alpha)}^{-1}(b, x_\infty)| = |\mu_b^{-1}(j_b(\alpha))| = |\mu_s^{-1}(\alpha)| = n_\alpha$$

vu que j_b est injective.

Montrons donc que $\mu_b = j_b \circ \mu_s$. Par définition de j_b il revient au même de démontrer que, pour tous $y, y' \in p_{\bar{R}}^{-1}(x_\infty)$ tels que $\mu_s(y) = \mu_s(y')$ on a $\mu_b(y) = \mu_b(y')$.

Cette assertion résulte du corollaire 15.6.7 de [EGA IV] appliqué à notre situation. En effet, soit Y_R° l'ouvert de lissité de la courbe Y_R sur R . Comme $Y_R \rightarrow R$ est plat et à fibres géométriquement réduites, $Y_R - Y_R^\circ$ est fini sur R . Les sections $y \in p_{\bar{R}}^{-1}(x_\infty)$ arrivent dans Y_R° puisque $Y_R \rightarrow R \times_k X$ est étale au-dessus de $R \times_k x_\infty$. D'après loc. cit, pour chaque section $y \in p_{\bar{R}}^{-1}(x_\infty)$, il existe un ouvert U_y de Y_R° , contenant l'image de la section y et tel qu'en tout point géométrique b de S , $U_{y,b} = U_y \cap Y_b^\circ$ soit la composante connexe de Y_b° contenant le point $y(b)$. Si maintenant $y, y' \in p_{\bar{R}}^{-1}(x_\infty)$ sont tels que $\mu_s(y) = \mu_s(y')$, alors $U_y \cap U_{y'}$ est non vide puisque cette intersection est déjà non vide dans la fibre spéciale. De plus, le morphisme $U_y \cap U_{y'} \rightarrow \bar{R}$ étant un morphisme lisse, *a fortiori* universellement ouvert, et que l'image de ce morphisme contient le point fermé de \bar{R} , il est donc surjectif. On a donc $U_{y,b} \cap U_{y',b} \neq \emptyset$ ce qui implique $U_{y,b} = U_{y',b}$, c'est-à-dire $\mu_b(y) = \mu_b(y')$. \square

Suivant Deligne (cf. [Del]), nous dirons qu'un complexe de faisceaux ℓ -adiques sur l'hensélisé en un point fermé d'un schéma de type fini sur \mathbb{F}_q est potentiellement pur de poids $w \in \mathbb{Z}$ s'il provient d'un complexe de faisceaux ℓ -adiques pur de poids w sur un voisinage étale de ce point fermé. Un tel complexe K potentiellement pur de poids 0 est automatiquement semi-simple, c'est à dire isomorphe à la somme de ses faisceaux de cohomologie perverse décalés

$$K \cong \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n K[-n]$$

où chaque ${}^p\mathcal{H}^n$ est pure de poids n (cf. la section (5.4) de [B-B-D]).

On appelle *endoscopiques* les deux caractères $\kappa_1, \kappa_2 : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rightarrow \{\pm 1\}$ déjà apparus dans la proposition précédente et définis par

$$\kappa_\alpha(d_1, d_2) \mapsto (-1)^{d_\alpha}.$$

COROLLAIRE 3.2.2. *Soit $f_R : \mathcal{M}_R \rightarrow R$ le changement de base du morphisme de Hitchin $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{A}$ par le morphisme $R \rightarrow \mathbb{A}$ d'hensélisation de \mathbb{A} en a . Alors, l'action de \mathbb{Z}^2 sur chaque ${}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_\ell)$ qui est induite par l'homomorphisme $\mathbb{Z}^2 \rightarrow P_R$ et par l'action de P_R sur \mathcal{M}_R , se factorise à travers le quotient fini $\mathbb{Z}^2 \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.*

De plus, pour chaque entier n , dans la décomposition

$${}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_\kappa {}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$$

suivant les caractères κ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, tous les facteurs directs sont potentiellement purs de poids n et, pour κ endoscopique, le facteur ${}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$ est à support dans le fermé S de R . En particulier, pour chaque caractère endoscopique κ , la restriction à S de ${}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$ est potentiellement pure de poids n .

Démonstration. D'après la proposition précédente, l'image de $(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2$ avec les d_α tous pairs, est une section de P_S sur S dont la restriction à chaque fibre géométrique de $P_S \rightarrow S$ est dans la composante neutre de cette fibre. D'après le lemme d'homotopie ci-dessous, (d_1, d_2) agit donc trivialement sur chaque ${}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_\ell)$. En d'autres termes, \mathbb{Z}^2 agit sur chaque ${}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_\ell)$ à travers son quotient $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Comme l'ouvert $\mathcal{M}^{\text{red}} \subset \mathcal{M}$ est lisse sur \mathbb{F}_q (cf. la proposition 2.5.2), le complexe $\mathbb{Q}_{\ell, \mathcal{M}^{\text{red}}}[0]$ est pur de poids 0. Comme la restriction $f^{\text{ell}} : \mathcal{M}^{\text{ell}} \rightarrow \mathbb{A}^{\text{ell}}$ de f au-dessus de \mathbb{A}^{ell} est un morphisme propre entre champs de Deligne-Mumford (cf. la proposition 2.8.4), on en déduit que $f_*^{\text{ell}}\mathbb{Q}_\ell$ est pur de poids 0 sur \mathbb{A}^{ell} et donc que $f_{R,*}\mathbb{Q}_\ell$ est potentiellement pur de poids 0.

Pour démontrer la dernière assertion, il suffit de vérifier que la restriction de ${}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$ à l'ouvert $R-S$ est nulle pour κ endoscopique. Soit b un point géométrique de $R-S$. D'après la proposition précédente, il existe $(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\kappa(d_1, d_2) = -1$ et que $\rho_b(d_1, d_2)$ soit dans la composante neutre de P_b . Ceci implique que $\rho_b(d_1, d_2)$ est dans la composante neutre de $P_{b'}$ pour tout point géométrique b' dans un voisinage étale de b . En invoquant de nouveau le lemme d'homotopie, on voit que (d_1, d_2) agit trivialement sur la restriction de ${}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_\ell)$ à un voisinage étale de b , de sorte que la restriction de la partie κ -isotypique ${}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$ à ce voisinage étale est nulle. Ceci étant vrai pour tous les points géométriques b de $R-S$, on conclut que la restriction de ${}^p\mathcal{H}^n(f_{R,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$ à $R-S$ est nulle. \square

LEMME 3.2.3 (Lemme d'homotopie). *Soit $f : X \rightarrow S$ un S -schéma et $\pi : G \rightarrow S$ un S -schéma en groupes lisse à fibres géométriquement connexes agissant sur X . Alors le groupe des sections globales $G(S)$ agit trivialement sur chaque faisceau de cohomologie perverse ${}^p\mathcal{H}^n(f_*\mathbb{Q}_\ell)$.*

Démonstration. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 G \times_S X & \xrightarrow{\alpha} & G \times_S X & \xrightarrow{\text{pr}_X} & X \\
 & \searrow \text{pr}_G & \downarrow \text{pr}_G & & \downarrow f \\
 & & G & \xrightarrow{\pi} & S
 \end{array}$$

où la flèche α envoie (g, x) sur (g, gx) . Dans ce diagramme, le triangle est commutatif et le carré est cartésien.

Par le théorème de changement de base par un morphisme lisse, on a $\pi^*({}^p\mathcal{H}^n(f_*\mathbb{Q}_\ell)) = {}^p\mathcal{H}^n(\mathrm{pr}_{G,*}\mathbb{Q}_\ell)$. Le morphisme α induit un endomorphisme $[\alpha]$ de ${}^p\mathcal{H}^n(\mathrm{pr}_{G,*}\mathbb{Q}_\ell)$.

Puisque π est un morphisme lisse à fibres géométriquement connexe, π^* convenablement décalé, est un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des faisceaux pervers sur S dans celle des faisceaux pervers sur G (cf. la proposition 4.2.5 de [B-B-D]). Il existe donc un unique endomorphisme β de ${}^p\mathcal{H}^n(f_*\mathbb{Q}_\ell)$ tel que $\pi^*(\beta) = [\alpha]$. Par functorialité, pour toute section globale $g : S \rightarrow G$, on a $g^*([\alpha]) = \beta$. En prenant la section neutre $g = 1$, on obtient que β est l'identité. Pour toute autre section $g : S \rightarrow G$, $g^*([\alpha])$ agit donc aussi comme l'identité sur ${}^p\mathcal{H}^n(\mathrm{pr}_{G,*}\mathbb{Q}_\ell)$. C'est ce qu'on voulait démontrer. \square

COROLLAIRE 3.2.4. *Pour chaque caractère endoscopique κ , le faisceau de cohomologie perverse ${}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$ est potentiellement pur de poids n quel que soit l'entier n .*

Démonstration. D'après le lemme ci-dessous, $f_{S,*}\mathbb{Q}_\ell$ se décompose en somme directe d'une partie κ et d'une partie hors κ . De plus, la restriction à S et les foncteurs de cohomologie perverse commutent à cette décomposition. Le théorème résulte donc du théorème de changement de base propre et du corollaire précédent. \square

Remarque. Soient $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{A}_H$ la fibration de Hitchin pour H et $g_S : \mathcal{N}_S \rightarrow S$ le changement de base à S . Puisque (a_1, a_2) , et donc S , est contenu dans l'ouvert elliptique de \mathbb{A}_H , \mathcal{N}_S est un champ de Deligne-Mumford (formellement) lisse sur k et le morphisme g_S est propre. Les faisceaux de cohomologie perverse ${}^p\mathcal{H}^n(g_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)$ et tous ses facteurs directs ${}^p\mathcal{H}^n(g_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$ sont eux aussi potentiellement purs de poids n .

LEMME 3.2.5. *Soient E un corps, \mathcal{A} une catégorie abélienne E -linéaire, K un objet de $D^b(\mathcal{A})$ et Γ un groupe abélien opérant de façon E -linéaire sur K . On suppose que pour chaque entier n l'objet de cohomologie $H^n(K)$ admette dans \mathcal{A} une décomposition Γ -équivariante*

$$H^n(K) = \bigoplus_{\chi} H^n(K)_{\chi}$$

où χ parcourt les caractères de Γ à valeurs dans E^\times , où pour chaque χ et chaque $\gamma \in \Gamma$, $\gamma - \chi(\gamma)$ opère de manière nilpotente sur $H^n(K)_{\chi}$, et où $H^n(K)_{\chi} = (0)$ pour tous les χ sauf un nombre fini.

Alors, il existe une unique décomposition Γ -équivariante

$$K = \bigoplus_{\chi} K_{\chi}$$

dans $D^b(\mathcal{A})$ où χ parcourt les caractères de Γ à valeurs dans E^\times , où pour chaque χ et chaque $\gamma \in \Gamma$, $\gamma - \chi(\gamma)$ opère de manière nilpotente sur K_χ , et où $K_\chi = (0)$ pour tous les χ sauf un nombre fini. De plus, on a $H^n(K_\chi) = H^n(K)_\chi$ quels que soient l'entier n et le caractère χ .

Démonstration. Commençons par l'unicité. Soient K' et K'' deux objets de $D^b(\mathcal{A})$ munis d'actions de Γ et soient χ' et χ'' deux caractères distincts de Γ à valeurs dans E^\times tels que, quel que soit $\gamma \in \Gamma$, $\gamma - \chi'(\gamma)$ et $\gamma - \chi''(\gamma)$ opèrent de manière nilpotente sur K' et K'' respectivement. Il s'agit de vérifier que tout morphisme Γ -équivariant $f : K' \rightarrow K''$ est nécessairement nul. Choisissons $\gamma \in \Gamma$ tel que $\chi'(\gamma) \neq \chi''(\gamma)$ et des entiers n' et n'' tels que $(\gamma - \chi'(\gamma))^{n'}$ et $(\gamma - \chi''(\gamma))^{n''}$ annulent K' et K'' respectivement. D'après le théorème de Bezout, il existe des polynômes $P'(T)$ et $P''(T)$ dans $E[T]$ tels que

$$P'(T)(T - \chi'(\gamma))^{n'} + P''(T)(T - \chi''(\gamma))^{n''} = 1.$$

On a alors

$$f = P''(\gamma)(\gamma - \chi''(\gamma))^{n''} f + f P'(\gamma)(\gamma - \chi'(\gamma))^{n'} = 0.$$

Passons à l'existence. Si K est concentré en un seul degré, il n'y a rien à faire. Sinon, soit $[a, b] \subset \mathbb{Z}$ le plus petit intervalle tel que $K \in \text{ob } D^{[a, b]}(\mathcal{A})$. On raisonne par récurrence sur l'entier $b - a \geq 1$. On a le dévissage

$$K' = \tau_{\leq b-1} K \xrightarrow{u} K \xrightarrow{v} K'' = H^b(K)[-b] \xrightarrow{\partial} K'[1].$$

Par hypothèse de récurrence on a les décompositions voulues de K' et K'' . Considérons la flèche de degré 1

$$\partial : \bigoplus_{\chi} K''_{\chi} \rightarrow \bigoplus_{\chi} K'_{\chi}[1].$$

D'après notre argument pour l'unicité, on a nécessairement $\partial = \bigoplus_{\chi} \partial_{\chi}$ pour des flèches $\partial_{\chi} : K''_{\chi} \rightarrow K'_{\chi}[1]$. On a donc une décomposition de K en $\bigoplus_{\chi} K_{\chi}$ où les $K_{\chi}[1]$ sont les cônes des flèches ∂_{χ} . Pour n'importe quels γ et χ , on sait par hypothèse de récurrence qu'il existe des entiers n' et n'' tels que $(\gamma - \chi(\gamma))^{n'}$ et $(\gamma - \chi(\gamma))^{n''}$ annulent K'_{χ} et K''_{χ} respectivement. Alors $(\gamma - \chi(\gamma))^{n'+n''}$ annule K_{χ} puisque $(\gamma - \chi(\gamma))^{n'}$ se factorise en $K_{\chi} \longrightarrow K'_{\chi} \xrightarrow{u} K_{\chi}$, que $(\gamma - \chi(\gamma))^{n''}$ se factorise en $K_{\chi} \xrightarrow{v} K''_{\chi} \longrightarrow K_{\chi}$ et que $vu = 0$. \square

3.3. Actions du tore. Au-dessus S on a deux revêtements

$$p_1 : Y_{1,S} \rightarrow S \times_k X \text{ et } p_2 : Y_{2,S} \rightarrow S \times_k X$$

de degré respectivement n_1 et n_2 qui, relativement à S , sont des familles de revêtements de X . On a aussi un morphisme

$$Y_{1,S} \amalg Y_{2,S} \rightarrow Y_S$$

qui est une normalisation partielle en famille de la courbe relative $Y_S \rightarrow S$.

Pour tout point géométrique b de S , les courbes $Y_{1,b}$ et $Y_{2,b}$ sont tracées sur la même surface réglée $\Sigma = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus (\mathcal{L}_D)^{\otimes -1})$ au-dessus de X . Leur réunion est Y_b . Leur intersection est un schéma fini Z_b de longueur

$$r = 2n_1n_2 \deg(D)$$

indépendante de b . Les Z_b s'organisent en une famille Z finie et plate de degré r au-dessus de S . Le schéma Z se plonge naturellement dans chacune des courbes relatives $Y_{1,S}$ et Y_S et on dispose en particulier d'un morphisme $q : Z \rightarrow S \times_k X$ qui est fini, mais n'est pas plat.

Si on note par $(-)'$ le changement de base par le revêtement double étale $X' \rightarrow X$ on a alors deux revêtements étales doubles

$$Y'_{1,S} \rightarrow Y_{1,S} \text{ et } Y'_{2,S} \rightarrow Y_{2,S}$$

et les revêtement finis composés

$$p'_1 : Y'_{1,S} \rightarrow S \times_k X \text{ et } p'_2 : Y'_{2,S} \rightarrow S \times_k X.$$

On a encore un morphisme

$$Y'_{1,S} \amalg Y'_{2,S} \rightarrow Y'_S$$

qui est une normalisation partielle en famille de la courbe relative $Y'_S \rightarrow S$.

Le schéma

$$Z' = Y'_{1,S} \cap Y'_{2,S}$$

est un revêtement double étale de Z . Il est donc fini et plat sur S de degré $2r$ et l'involution τ agit sur Z' sans point fixe. On note $q' : Z' \rightarrow S \times_k X$ le morphisme composé du revêtement étale double $Z' \rightarrow Z$ et de q .

Considérons les faisceaux en groupes commutatifs

$$J = ((\pi \circ p')_* \mathbb{G}_{m,Y'_S})^{\tau^* = (-)^{-1}}, \quad J_\alpha = ((\pi \circ p'_\alpha)_* \mathbb{G}_{m,Y'_{\alpha,S}})^{\tau^* = (-)^{-1}}$$

$$\text{et } K = (q'_* \mathbb{G}_{m,Z'})^{\tau^* = (-)^{-1}}$$

pour la topologie fppf sur $S \times_k X$, où $\pi \circ p' : Y'_S \rightarrow X'_S \rightarrow X$ et $\pi \circ p'_\alpha : Y'_{\alpha,S} \rightarrow X'_S \rightarrow X$, $\alpha \in \{1, 2\}$, sont les morphismes composés.

On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow J \rightarrow J_1 \times J_2 \rightarrow K \rightarrow 0$$

qui induit une flèche co-bord

$$\mathrm{pr}_{S,*} K \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathrm{pr}_{S,*} J)$$

où $\mathrm{pr}_S : S \times_k X \rightarrow S$ est la projection canonique. Notons que par définition, P_S est le champ de Picard associé au complexe $\tau_{\leq 1}(\mathrm{pr}_{S,*} J)$ de faisceaux en groupes abéliens sur S . En termes concrets, la donnée d'une section globale de K est équivalente à une donnée de recollement des modules inversibles triviaux

sur $Y'_{1,S}$ et $Y'_{2,S}$ avec structures unitaires triviales le long de Z' , et la flèche de co-bord ci-dessus envoie cette dernière donnée sur le module inversible recollé.

Considérons la fibre spéciale du morphisme fini et plat $h = \text{pr}_S \circ q : Z \rightarrow S$. C'est un k -schéma artinien dont le réduit $h_{s,\text{red}} : Z_{s,\text{red}} \rightarrow s = \text{Spec}(k)$ est le spectre d'un produit fini d'extensions finies séparables des k . Comme k est parfait, on a une rétraction canonique $Z_s \rightarrow Z_{s,\text{red}}$ (cf. le corollaire (19.6.2) du chapitre 0 de [EGA IV]) et comme S est hensélien on a une factorisation canonique

$$h : Z \longrightarrow \bar{Z} \xrightarrow{\bar{h}} S$$

de h où le morphisme $Z \rightarrow \bar{Z}$ est totalement ramifié au sens où il induit un isomorphisme de $Z_{s,\text{red}}$ sur \bar{Z}_s et où \bar{h} est fini étale (corollaire (18.5.12) de [EGA IV]). De même, on a une factorisation

$$h' = \text{pr}_S \circ q' : Z' \longrightarrow \bar{Z}' \xrightarrow{\bar{h}'} S$$

de h' où le morphisme $Z' \rightarrow \bar{Z}'$ est totalement ramifié au sens où il induit un isomorphisme de $Z'_{s,\text{red}}$ sur \bar{Z}'_s et où \bar{h}' est fini étale, factorisation qui s'insère dans un diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Z' & \longrightarrow & \bar{Z}' \\ \downarrow & & \downarrow \searrow \bar{h}' \\ Z & \longrightarrow & \bar{Z} \xrightarrow{\bar{h}} S \end{array}$$

où les flèches verticales sont des revêtements doubles étales.

On a donc un sous- S -tore

$$\tilde{T} = \bar{h}'_* \mathbb{G}_{m,\bar{Z}'} \subset h'_* \mathbb{G}_{m,Z'}$$

du S -schéma en groupes commutatifs lisse $h'_* \mathbb{G}_{m,Z'}$, dont la fibre spéciale

$$\tilde{T}_s \subset h'_{s,*} \mathbb{G}_{m,Z'_s}$$

est le sous-tore maximal et s'envoie isomorphiquement sur le tore quotient maximal de $h'_{s,*} \mathbb{G}_{m,Z'_s}$ (comparer avec le théorème 5.8 de l'exposé 4 de [SGA 3]).

L'involution τ^* de $h'_* \mathbb{G}_{m,Z'}$ préserve le sous- S -tore \tilde{T} , et

$$T = (\tilde{T})^{\tau^* = (-)^{-1}}$$

est le sous- S -tore de $\text{pr}_{S,*} K = (h'_* \mathbb{G}_{m,Z'})^{\tau^* = (-)^{-1}}$ qui relève canoniquement le tore maximal

$$T_s \cong ((h'_{s,\text{red}})_* \mathbb{G}_{m,Z'_{s,\text{red}}})^{\tau^* = (-)^{-1}}$$

de $(\text{pr}_{S,*} K)_s$.

On a donc construit un S -tore T et un S -homomorphisme $T \rightarrow P_S$.

PROPOSITION 3.3.1. *L'image de l'immersion fermée $i : \mathcal{N}_S \hookrightarrow \mathcal{M}_S$ est précisément le lieu des points fixes de T agissant sur \mathcal{M}_S à travers le morphisme $T \rightarrow P_S$.*

Démonstration. Comme T agit sur \mathcal{N}_S à travers la flèche composée évidente,

$$T \subset \mathrm{pr}_{S,*} K \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathrm{pr}_{S,*} J) \rightarrow \mathcal{H}^1(\mathrm{pr}_{S,*} J_1) \times_S \mathcal{H}^1(\mathrm{pr}_{S,*} J_2)$$

on a évidemment l'inclusion $\mathcal{N}_S \subset \mathcal{M}_S^T$. Il reste donc à montrer que tout point géométrique de \mathcal{M}_S qui est fixe par T est dans \mathcal{N}_S .

La donnée d'un point géométrique m de \mathcal{M}_S est équivalente aux données suivantes:

- (a) un point géométrique b dans S ,
- (b) un module cohérent \mathcal{F} sans torsion de rang 1 sur le revêtement double étale Y'_b de la courbe spectrale Y_b , ce module étant muni d'un isomorphisme $\iota : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \tau^* \mathcal{F}^\vee$ tel que ${}^t \iota = \tau^* \iota$.

De plus, il revient au même de se donner le couple (\mathcal{F}, ι) ou de se donner:

- (1) les restrictions \mathcal{F}_1° et \mathcal{F}_2° de \mathcal{F} aux composantes $Y'_{1,b} - Z'_b$ et $Y_{2,b} - Z'_b$ de $Y'_b - Z'_b$, ces restrictions étant munies d'isomorphismes $\iota_\alpha : \mathcal{F}_\alpha^\circ \xrightarrow{\sim} \tau^*(\mathcal{F}_\alpha^\circ)^\vee$ avec toujours ${}^t \iota_\alpha = \tau^* \iota_\alpha$ pour $\alpha = 1, 2$,
- (2) pour chaque point (fermé) z de Z_b , les restrictions $\mathcal{V}_{z'}$ et $\mathcal{V}_{z''}$ de \mathcal{F} aux complétés formels de Y'_b en les deux points z' et z'' de Z'_b au-dessus de z , ces restrictions étant munies d'un isomorphisme $\mathcal{V}_{z''} \cong \mathcal{V}_{z'}^\vee$,
- (3) les données de recollement évidentes.

Pour chaque point z de Z_b choisissons arbitrairement un des deux points de Z'_b au-dessus de z , point que l'on note z' ; notons $A_{z'}$ l'anneau local complété de Y'_b en ce point et $\mathrm{Frac}(A_{z'})$ l'anneau total des fractions de $A_{z'}$. On a

$$A_{z'} \subset A_{1,z'} \times A_{2,z'} \subset \mathrm{Frac}(A_{1,z'}) \oplus \mathrm{Frac}(A_{2,z'}) = \mathrm{Frac}(A_{z'})$$

où, pour $\alpha = 1, 2$, $A_{\alpha,z'}$ est l'anneau local complété de $Y'_{\alpha,b}$ en z' et $\mathrm{Frac}(A_{\alpha,z'})$ est l'anneau total des fractions de $A_{\alpha,z'}$. Notons V_α la fibre de \mathcal{F}_α° au point $\mathrm{Spec}(\mathrm{Frac}(A_{\alpha,z'}))$ de $Y'_{\alpha,b} - Z'_b$.

Les données (2) sont encore équivalentes à la donnée, pour chaque point z de Z_b d'un $A_{z'}$ -réseau $\mathcal{V}_{z'} \subset V_1 \oplus V_2$.

Si l'on fixe le point géométrique b de S on peut donc écrire tout point géométrique m de \mathcal{M}_b sous la forme

$$m = ((\mathcal{F}_\alpha^\circ, \iota_\alpha)_{\alpha=1,2}, (\mathcal{V}_{z'})_{z \in Z_b}, \text{données de recollement}).$$

On a une description analogue pour les points géométrique de $\mathcal{N}_S \subset \mathcal{M}_S$, la seule différence étant que l'on exige en plus que les réseaux $\mathcal{V}_{z'}$ soient décomposés au sens où

$$\mathcal{V}_{z'} = \mathcal{V}_{z',1} \oplus \mathcal{V}_{z',2} \subset V_1 \oplus V_2$$

où $\mathcal{V}_{z',\alpha}$ est un $A_{\alpha,z'}$ -réseau dans V_α , $\alpha = 1, 2$.

Dans la suite, pour alléger les notations, on privilégie la composante $Y_{1,b}$ de Y_b , ou ce qui revient au même on identifie le quotient de $\kappa(b)^\times \times \kappa(b)^\times$ par le $\kappa(b)^\times$ diagonal à $\kappa(b)^\times$ via la première projection. Alors, le groupe des $\kappa(b)$ -points de la fibre T_b de T en b admet la description suivante:

$$T_b(\kappa(b)) = (\kappa(b)^\times)^{Z_b} = \prod_{z \in Z_b} (\kappa(b)^\times \times \kappa(b)^\times)^{\tau^* = (-)^{-1}} \subset \prod_{z \in Z_b} (A_{z'}^\times \times A_{z'}^\times)^{\tau^* = (-)^{-1}}$$

où τ^* échange les deux copies de $\kappa(b)^\times$ et les deux copies de $A_{z'}$ (le premier facteur $\kappa(b)^\times$ ou $A_{z'}$ correspond à z' et le second à $\tau(z')$).

De plus l'action de $t \in T_b(\kappa(b))$ sur les points géométriques m de \mathcal{M}_b est donnée par l'action, pour chaque $z \in Z_b$, du facteur $t_z \in \kappa(b)^\times$ correspondant sur le réseau $\mathcal{V}_{z'}$ par l'homothétie de rapport $(t_z, 1) \in A_{1,z'}^\times \times A_{2,z'}^\times$,

$$t_z \cdot \mathcal{V}_z = (t_z, 1)\mathcal{V}_z \subset V_1 \oplus V_2.$$

Par suite, m est fixe sous l'action $T_b(\kappa(b))$ si et seulement si, pour chaque $z \in Z_b$, \mathcal{V}_z est décomposé, d'où la proposition. \square

3.4. *Un système local de rang 1 sur S .* Rappelons qu'au-dessus du schéma hensélien S , nous avons construit un schéma fini et plat $h : Z \rightarrow S$ de degré r et un revêtement double étale $\pi_Z : Z' \rightarrow Z$.

Notons $L_{Z'/Z}$ le système local en \mathbb{Z} -modules libres de rang 1 et d'ordre 2 qui est le conoyau de la flèche d'adjonction

$$\mathbb{Z}_Z \rightarrow \pi_{Z,*}\mathbb{Z}_{Z'}.$$

Comme S et donc aussi Z sont henséliens, $L_{Z'/Z}$ est géométriquement constant.

Soit S_{\natural} l'ouvert de S dont les points géométriques b ont les deux propriétés suivantes:

- les deux courbes $Y_{1,b}$ et $Y_{2,b}$, qui sont tracées sur la même surface réglée $\kappa(b) \otimes_k \Sigma$, se coupent transversalement,
- - les revêtements $Y_{1,b} \rightarrow \kappa(b) \otimes_k X$ et $Y_{2,b} \rightarrow \kappa(b) \otimes_k X$ sont étales en tout point d'intersection $z \in Z_b = Y_{1,b} \cap Y_{2,b}$.

L'ouvert S_{\natural} est dense dans S puisque l'ouvert $\mathbb{A}_{H,\natural}^{G\text{-red}} \subset \mathbb{A}_H$ est non vide (cf. (2.9)). On note par $(-)_\natural$ le changement de base par l'immersion ouverte $S_{\natural} \hookrightarrow S$. Les morphismes $h_\natural : Z_\natural \rightarrow S_\natural$ et $h'_\natural : Z'_\natural \rightarrow S_\natural$ sont finis étales de degré r et $2r$ respectivement.

Le système local en \mathbb{Z} -modules libres de rang 1

$$L_{Z'_i/Z_i/S_i} = \left(\bigwedge^r h_{\mathfrak{h},*} L_{Z'_i/Z_i} \right) \otimes \left(\bigwedge^r h_{\mathfrak{h},*} \mathbb{Z}_{Z_i} \right)^{\otimes -1}$$

sur S_i est géométriquement constant. Il se prolonge donc trivialement en un système local en \mathbb{Z} -modules libres de rang 1 sur S tout entier. Notons $L_{Z'/Z/S}$ ce prolongement qui est bien sûr lui aussi géométriquement constant.

LEMME 3.4.1. *L'unique valeur propre de Frobenius agissant sur la fibre spéciale de $L_{Z'/Z/S}$ est égale à $(-1)^{m_{Z'/Z/S}}$ où*

$$m_{Z'/Z/S} = \sum_z \dim_{\kappa(z)}(\mathcal{O}_{Z_s, z}),$$

la somme portant sur les point fermés z de Z_s qui sont inertes dans Z'_s .

Démonstration. Comme S est hensélien, Z est somme disjointe des ses localisés en les points fermés de Z_s . On peut donc supposer qu'il n'y a qu'un seul point fermé z dans Z_s .

Si ce point est décomposé dans Z'_s , le revêtement étale Z' de Z est trivial et alors $L_{Z'/Z} = \mathbb{Z}_Z$ et $L_{Z'/Z/S} = \mathbb{Z}_S$, d'où l'assertion dans ce cas.

Si au contraire z est inerte dans Z'_s , notons K , K_Z et $K_{Z'}$ les corps des fonctions de S , Z et Z' , et notons k_Z et $k_{Z'}$ les corps résiduels de Z et Z' . Fixons une clôture séparable \bar{K} de K et notons \bar{k} le corps résiduel du normalisé de S dans \bar{K} . On a un épimorphisme de groupes pro-finis $\text{Gal}(\bar{K}/K) \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k)$ et un carré cartésien de $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ -ensembles

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_K(K_{Z'}, \bar{K}) & \longrightarrow & \text{Hom}_k(k_{Z'}, \bar{k}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_K(K_Z, \bar{K}) & \longrightarrow & \text{Hom}_k(k_Z, \bar{k}) \end{array}$$

où toutes les flèches sont surjectives et où les fibres des flèches verticales ont toutes 2 éléments et celles des flèches horizontales ont toutes $m = m_{Z'/Z/S}$ éléments.

Soit $\varphi \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$ un relèvement arbitraire de l'élément de Frobenius de $\text{Frob}_k \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$. Il s'agit de vérifier que φ agit par multiplication par $(-1)^m$ sur

$$\left(\bigwedge^{2r} \mathbb{Z}^{\text{Hom}_K(K_{Z'}, \bar{K})} \right) \otimes \left(\bigwedge^r \mathbb{Z}^{\text{Hom}_K(K_Z, \bar{K})} \right)^{\otimes -2}$$

ou ce qui revient au même, que le déterminant de l'action de φ sur $\mathbb{Z}^{\text{Hom}_K(K_{Z'}, \bar{K})}$ est $(-1)^m$.

Une fois fixé un point base $\iota'_0 \in \text{Hom}_k(k_{Z'}, \bar{k})$, on a

$$\text{Hom}_k(k_{Z'}, \bar{k}) = \{\iota'_0, \iota'_1, \dots, \iota'_{2r-1}\}$$

et

$$\mathrm{Hom}_k(k_Z, \bar{k}) = \{\iota_0 = \iota_r, \iota_1 = \iota_{r+1}, \dots, \iota_{r-1} = \iota_{2r-1}\}$$

où $\iota'_n = \mathrm{Frob}_k^n \circ \iota'_0$ et $\iota_n = \iota'_n|_{k_Z}$ pour $n = 1, \dots, 2r - 1$. Par suite on a

$$\mathrm{Hom}_K(K_Z, \bar{K}) = A_0 \amalg A_1 \amalg \dots \amalg A_{r-1}$$

où A_n est la fibre de $\mathrm{Hom}_K(K_Z, \bar{K}) \rightarrow \mathrm{Hom}_k(k_Z, \bar{k})$ en ι_n , et φ induit des isomorphismes

$$A_0 \xrightarrow{\sim} A_1 \xrightarrow{\sim} \dots \xrightarrow{\sim} A_{r-1} \xrightarrow{\sim} A_0.$$

Si on note Φ le composé de ces isomorphismes, on peut donc identifier $\mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}_K(K_Z, \bar{K})}$ muni de l'action de φ à $(\mathbb{Z}^{A_0})^{\{0,1,\dots,r-1\}}$ muni de l'automorphisme

$$(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) \mapsto (\Phi(x_{r-1}), x_0, \dots, x_{r-2}).$$

De même, on peut identifier $\mathbb{Z}^{\mathrm{Hom}_K(K_{Z'}, \bar{K})}$ muni de l'action de φ à $(\mathbb{Z}^{A_0})^{\{0,1,\dots,2r-1\}}$ muni de l'automorphisme

$$(x_0, x_1, \dots, x_{2r-1}) \mapsto (\Phi^2(x_{2r-1}), x_0, \dots, x_{2r-2}).$$

Le (signe du) déterminant de ce dernier automorphisme ne dépend pas de Φ , de sorte qu'on est ramené au cas où Φ est l'identité. Dans ce cas, le déterminant est égal à la signature de la permutation circulaire de $\{0, 1, \dots, 2r - 1\}$ à la puissance le nombre d'éléments A_0 , c'est-à-dire à $((-1)^{(2r-1)})^m = (-1)^m$. \square

3.5. *Le tore \mathcal{T} sur l'ouvert où Y_1 et Y_2 se coupent transversalement.* Le $S_{\mathfrak{h}}$ -schéma en groupes

$$\tilde{\mathcal{T}} = h'_{\mathfrak{h},*} \mathbb{G}_{m, Z'_{\mathfrak{h}}}$$

et le noyau

$$\mathcal{T} = (h'_{\mathfrak{h},*} \mathbb{G}_{m, Z'_{\mathfrak{h}}})^{\tau^* = (-)^{-1}}$$

sont des $S_{\mathfrak{h}}$ -tores de rang $2r$ et r respectivement qui contiennent (en général strictement) les $S_{\mathfrak{h}}$ -tores $\tilde{T}_{\mathfrak{h}}$ et $T_{\mathfrak{h}}$.

Si $Y'_{S_{\mathfrak{h}}} \rightarrow S_{\mathfrak{h}}$ est la restriction à $S_{\mathfrak{h}}$ de la courbe spectrale universelle, on a un homomorphisme canonique de $S_{\mathfrak{h}}$ -schémas en groupes

$$\tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathrm{Pic}_{Y'_{S_{\mathfrak{h}}}/S_{\mathfrak{h}}}$$

qui peut se construire comme un homomorphisme de co-bord d'une suite exacte longue de cohomologie et qui se décrit concrètement de la façon suivante: pour tout point b de $S_{\mathfrak{h}}$ on construit un fibré en droites sur Y'_b en recollant les fibrés triviaux $\mathcal{O}_{Y'_{1,b}}$ et $\mathcal{O}_{Y'_{2,b}}$ à l'aide d'une fonction de recollement dans $\tilde{\mathcal{T}}_b = H^0(Z'_b, \mathcal{O}_{Z'_b}^\times)$. L'homomorphisme précédent induit un homomorphisme de $S_{\mathfrak{h}}$ -schémas en groupes

$$\mathcal{T} \rightarrow P_{S_{\mathfrak{h}}} = (\mathrm{Pic}_{Y'_{S_{\mathfrak{h}}}/S_{\mathfrak{h}}})^{\tau^* = (-)^{\otimes -1}}$$

et donc une action de \mathcal{T} sur la restriction $\mathcal{M}_{S_{\mathfrak{h}}}$ de \mathcal{M} à $S_{\mathfrak{h}}$. Le lieu des points fixes pour cette dernière action est le fermé $\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}} \subset \mathcal{M}_{S_{\mathfrak{h}}}$ induit par le fermé \mathcal{N} de \mathcal{M} .

Sur $Z'_{\mathfrak{h}} \times_{S_{\mathfrak{h}}} \mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}}$ on a un fibré en droites muni d'une structure unitaire

$$\mathcal{E}_{12} = (\tilde{\mathcal{E}}_{12}, \tilde{\mathcal{E}}_{12} \xrightarrow{\sim} \tau^*(\tilde{\mathcal{E}}_{12})^{\otimes -1})$$

dont la fibre en $(z', (\mathcal{F}_1, \iota_1), (\mathcal{F}_2, \iota_2))$ est $(\mathcal{F}_{1,z'} \otimes \mathcal{F}_{2,z'}^{\otimes -1}, \iota_{1,z'} \otimes \iota_{2,z'}^{\otimes -1})$ où

$$\iota_{1,z'} \otimes \iota_{2,z'}^{\otimes -1} : \mathcal{F}_{1,z'} \otimes \mathcal{F}_{2,z'}^{\otimes -1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{1,\tau(z')}^{\otimes -1} \otimes \mathcal{F}_{2,\tau(z')} = (\mathcal{F}_{1,\tau(z')} \otimes \mathcal{F}_{2,\tau(z')}^{\otimes -1})^{\otimes -1}.$$

A priori $\iota_{\alpha,z'}$ est un isomorphisme entre $\mathcal{F}_{\alpha,z'}$ et $\mathcal{F}_{\alpha,\tau(z')}^{\otimes -1} \otimes \omega_{Y'_{\alpha,b}/\kappa(b) \otimes_k X', \tau(z')}$, mais comme b est dans $S_{\mathfrak{h}}$, $Y'_{\alpha,b}$ est étale sur $\kappa(b) \otimes_k X'$ en le point z' et la droite $\omega_{Y'_{\alpha,b}/\kappa(b) \otimes_k X', \tau(z')}$ est canoniquement trivialisée.

La donnée du fibré en droites $\tilde{\mathcal{E}}_{12}$ sur $Z'_{\mathfrak{h}} \times_{S_{\mathfrak{h}}} \mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}}$ équivaut à celle d'un $\tilde{\mathcal{T}}$ -torseur sur $\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}}$. Par suite, la donnée de \mathcal{E}_{12} équivaut à la donnée d'un \mathcal{T} -torseur sur $\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}}$, toseur que l'on note dans la suite encore par \mathcal{E}_{12} (voir la section 6 de [La-Ra] pour un autre point de vue sur ce toseur).

Sur l'ouvert $S_{\mathfrak{h}} \subset S$ nous avons aussi un morphisme injectif naturel de systèmes locaux en \mathbb{Z} -modules libres

$$L_{Z'_{\mathfrak{h}}/Z_{\mathfrak{h}}/S_{\mathfrak{h}}} \hookrightarrow \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h}}}}^r(X^*(\mathcal{T}))$$

où $L_{Z'_{\mathfrak{h}}/Z_{\mathfrak{h}}/S_{\mathfrak{h}}}$ est la restriction à l'ouvert $S_{\mathfrak{h}} \subset S$ du système local $L_{Z'/Z/S}$ construit dans la section (3.4).

En effet, soit $a : S_{\mathfrak{h},1} \rightarrow S_{\mathfrak{h}}$ un revêtement fini étale qui déploie totalement $h_{\mathfrak{h}} : Z_{\mathfrak{h}} \rightarrow S_{\mathfrak{h}}$ et $h'_{\mathfrak{h}} : Z'_{\mathfrak{h}} \rightarrow S_{\mathfrak{h}}$, de sorte que, après changement de base par $S_{\mathfrak{h},1} \rightarrow S_{\mathfrak{h}}$, on ait les revêtements triviaux

$$S_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h}}} Z'_{\mathfrak{h}} = S_{\mathfrak{h},1}^{\mathrm{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z'_{\mathfrak{h}})} \rightarrow S_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h}}} Z_{\mathfrak{h}} = S_{\mathfrak{h},1}^{\mathrm{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z_{\mathfrak{h}})} \rightarrow S_{\mathfrak{h},1}$$

et les tores déployés

$$S_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h}}} \tilde{\mathcal{T}} = \mathbb{G}_{\mathrm{m}, S_{\mathfrak{h},1}}^{\mathrm{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z'_{\mathfrak{h}})}$$

et

$$S_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h}}} \mathcal{T} = \mathrm{Ker}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}, S_{\mathfrak{h},1}}^{\mathrm{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z'_{\mathfrak{h}})} \rightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}, S_{\mathfrak{h},1}}^{\mathrm{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z_{\mathfrak{h}})})$$

où l'homomorphisme norme est donné par $(x_{\varphi'})_{\varphi'} \rightarrow (\prod_{\pi \circ \varphi' = \varphi} x_{\varphi'})_{\varphi}$.

Pour chaque $\varphi' \in \mathrm{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z'_{\mathfrak{h}})$ on note alors

$$\chi_{\varphi'} : S_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h}}} \mathcal{T} \subset \mathbb{G}_{\mathrm{m}, S_{\mathfrak{h},1}}^{\mathrm{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z'_{\mathfrak{h}})} \rightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m}, S_{\mathfrak{h},1}}.$$

la projection canonique sur la composante d'indice φ' et on voit $\chi_{\varphi'}$ comme une section globale de $X^*(S_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h}}} \mathcal{T})$.

Choisissons arbitrairement un type «CM», c'est-à-dire un ordre (φ'_-, φ'_+) dans la fibre de $\mathrm{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z'_{\mathfrak{h}}) \rightarrow \mathrm{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z_{\mathfrak{h}})$ en chaque $\varphi \in \mathrm{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z_{\mathfrak{h}})$,

de sorte que l'homomorphisme norme s'écrit encore $(x_{\varphi'})_{\varphi'} \rightarrow (x_{\varphi'_-} x_{\varphi'_+})_{\varphi}$ et que $\chi_{\varphi'_-} = -\chi_{\varphi'_+}$. Alors, on peut former le produit

$$\prod_{\varphi \in \text{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z_{\mathfrak{h}})} \chi_{\varphi'_+} \in H^0(S_{\mathfrak{h},1}, \text{Sym}_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h},1}}}^r(X^*(S_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h}}} \mathcal{T}))).$$

LEMME 3.5.1. *Il existe un unique morphisme injectif de systèmes locaux sur $S_{\mathfrak{h}}$*

$$L_{Z_{\mathfrak{h}}/Z_{\mathfrak{h}}/S_{\mathfrak{h}}} \hookrightarrow \text{Sym}_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h}}}}^r(X^*(\mathcal{T}))$$

dont la restriction à $S_{\mathfrak{h},1}$ est l'injection

$$\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h},1}} \hookrightarrow \text{Sym}_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h},1}}}^r(X^*(S_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h}}} \mathcal{T}))$$

qui envoie la section globale 1 sur la section globale $\prod_{\varphi \in \text{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z_{\mathfrak{h}})} \chi_{\varphi'_+}$.

Démonstration. Comme $\chi_{\varphi'_-} = -\chi_{\varphi'_+}$, le produit $\prod_{\varphi \in \text{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z_{\mathfrak{h}})} \chi_{\varphi'_+}$ ne dépend pas, au signe près, du type CM choisi. De plus, le co-cycle de descente de ce produit est exactement le même que celui du faisceau constant $X^*(S_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h}}} \mathcal{T}) = a^*X^*(\mathcal{T})$ en le système local $X^*(\mathcal{T})$, d'où le lemme. \square

3.6. *Le théorème géométrique sur l'ouvert $S_{\mathfrak{h}}$.* Sur l'ouvert $S_{\mathfrak{h}}$ de S on a le triangle commutatif de morphismes de champs algébriques

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}} & \hookrightarrow & \mathcal{M}_{S_{\mathfrak{h}}} \\ & \searrow^{g_{S_{\mathfrak{h}}}} & \swarrow_{f_{S_{\mathfrak{h}}}} \\ & & S_{\mathfrak{h}} \end{array}$$

où l'image de l'immersion fermée horizontale est le lieu des points fixes sous l'action du sous- $S_{\mathfrak{h}}$ -tore $T_{\mathfrak{h}} \subset \mathcal{T}$ et donc aussi du tore \mathcal{T} puisque ce dernier agit trivialement sur $\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}}$.

Le \mathcal{T} -torseur \mathcal{E}_{12} sur $\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}}$ de la section précédente induit un \mathcal{T} -torseur $[\mathcal{E}_{12}/\mathcal{T}]$ sur le champ algébrique $[\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}}/\mathcal{T}]$. Ici on a pris le quotient $[\mathcal{E}_{12}/\mathcal{T}]$ pour l'action de \mathcal{T} sur \mathcal{E}_{12} de la structure de tosseur, alors qu'on a pris le quotient $[\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}}/\mathcal{T}]$ pour l'action triviale de \mathcal{T} .

Si χ est une section de $X^*(\mathcal{T})$ sur un ouvert étale $U \rightarrow S_{\mathfrak{h}}$ de $S_{\mathfrak{h}}$, on peut pousser le \mathcal{T}_U -torseur $[\mathcal{E}_{12}/\mathcal{T}]_U$ par χ et prendre la première classe de Chern du fibré en droites $\chi([\mathcal{E}_{12}/\mathcal{T}]_U)$ sur $[\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}}/\mathcal{T}]_U = [\mathcal{N}_U/\mathcal{T}_U]$ ainsi obtenu. Bien entendu, on a noté $(-)_U$ le changement de base par le morphisme $U \rightarrow S_{\mathfrak{h}}$. On voit cette classe de Chern comme un morphisme de complexes ℓ -adiques

$$c_1(\chi([\mathcal{E}_{12}/\mathcal{T}]_U)) : \mathbb{Q}_{\ell, [\mathcal{N}_U/\mathcal{T}_U]} \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell, [\mathcal{N}_U/\mathcal{T}_U]}[2](1)$$

sur $[\mathcal{N}_U/\mathcal{T}_U]$. Cette classe de Chern induit par image directe sur U un morphisme de complexes ℓ -adiques

$$g_{U,*}^{\mathcal{T}_U} \mathbb{Q}_{\ell} \rightarrow g_{U,*}^{\mathcal{T}_U} \mathbb{Q}_{\ell}[2](1)$$

sur U , où $g_U : \mathcal{N}_U := U \times_{S_{\mathfrak{h}}} \mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}} \rightarrow U$ est la projection canonique et où $g_U^{\mathcal{T}} : [\mathcal{N}_U/\mathcal{T}_U] \rightarrow U$ est le morphisme structural. Ce morphisme de complexes induit à son tour un morphisme de faisceaux pervers ℓ -adiques gradués

$$\bigoplus_n^{\mathbb{P}} \mathcal{H}^n(g_{U,*}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_{\ell}) \rightarrow \bigoplus_n^{\mathbb{P}} \mathcal{H}^{n+2}(g_{U,*}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_{\ell})(1)$$

sur U .

On a défini ainsi un morphisme de faisceaux pervers ℓ -adiques gradués

$$e_{12} : X^*(\mathcal{T}) \otimes_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h}}}} \bigoplus_n^{\mathbb{P}} \mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h}},*}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_{\ell}) \rightarrow \bigoplus_n^{\mathbb{P}} \mathcal{H}^{n+2}(g_{S_{\mathfrak{h}},*}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_{\ell})(1)$$

sur $S_{\mathfrak{h}}$, où $g_{S_{\mathfrak{h}}}^{\mathcal{T}} : [\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}}/\mathcal{T}] \rightarrow S_{\mathfrak{h}}$ est le morphisme structural. En itérant r fois le morphisme e_{12} on obtient un morphisme de faisceaux pervers ℓ -adiques gradués

$$e_{12}^r : \text{Sym}^r(X^*(\mathcal{T})) \otimes_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h}}}} \bigoplus_n^{\mathbb{P}} \mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h}},*}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_{\ell}) \rightarrow \bigoplus_n^{\mathbb{P}} \mathcal{H}^{n+2r}(g_{S_{\mathfrak{h}},*}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_{\ell})(r),$$

sur $S_{\mathfrak{h}}$, et aussi un morphisme de faisceaux pervers ℓ -adiques gradués

$$e_{12}^r : \text{Sym}^r(X^*(\mathcal{T})) \otimes_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h}}}} \bigoplus_n^{\mathbb{P}} \mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h}},*}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_{\ell})_{\kappa} \rightarrow \bigoplus_n^{\mathbb{P}} \mathcal{H}^{n+2r}(g_{S_{\mathfrak{h}},*}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_{\ell})_{\kappa}(r),$$

sur $S_{\mathfrak{h}}$ pour chaque caractère κ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

On a le sous-système local de rang 1

$$L_{Z'_{\mathfrak{h}}/Z_{\mathfrak{h}}/S_{\mathfrak{h}}} \subset \text{Sym}^r(X^*(\mathcal{T}))$$

construit dans la section précédente.

LEMME 3.6.1. *Les restrictions*

$$L_{Z'_{\mathfrak{h}}/Z_{\mathfrak{h}}/S_{\mathfrak{h}}} \otimes_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h}}}} \bigoplus_n^{\mathbb{P}} \mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h}},*}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_{\ell}) \rightarrow \bigoplus_n^{\mathbb{P}} \mathcal{H}^{n+2r}(g_{S_{\mathfrak{h}},*}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_{\ell})(r)$$

et

$$L_{Z'_{\mathfrak{h}}/Z_{\mathfrak{h}}/S_{\mathfrak{h}}} \otimes_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h}}}} \bigoplus_n^{\mathbb{P}} \mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h}},*}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_{\ell})_{\kappa} \rightarrow \bigoplus_n^{\mathbb{P}} \mathcal{H}^{n+2r}(g_{S_{\mathfrak{h}},*}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_{\ell})_{\kappa}(r)$$

à $L_{Z'_{\mathfrak{h}}/Z_{\mathfrak{h}}/S_{\mathfrak{h}}} \hookrightarrow \text{Sym}^r(X^*(\mathcal{T}))$ des morphismes e_{12}^r ci-dessus sont injectives.

Compte tenu de ce lemme on peut identifier et on identifiera les images de ces morphismes avec leurs sources.

Démonstration. Il suffit de démontrer l'injectivité de la première flèche après le changement de base par le revêtement fini étale $a : S'_{\mathfrak{h},1} \rightarrow S_{\mathfrak{h}}$, qui déploie totalement $h_{\mathfrak{h}} : Z_{\mathfrak{h}} \rightarrow S_{\mathfrak{h}}$ et $h'_{\mathfrak{h}} : Z'_{\mathfrak{h}} \rightarrow S_{\mathfrak{h}}$, considéré dans la construction de la flèche $L_{Z'_{\mathfrak{h}}/Z_{\mathfrak{h}}/S_{\mathfrak{h}}} \subset \text{Sym}^r(X^*(\mathcal{T}))$, construction dont on reprend les notations.

Appelons type CM et notons $\varphi \mapsto \varphi'_+$ une section du morphisme 2 vers 1

$$\text{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S'_{\mathfrak{h},1}, Z'_{\mathfrak{h}}) \rightarrow \text{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1}, Z_{\mathfrak{h}}).$$

Le changement de base ci-dessus déploie aussi le tore \mathcal{T} et le choix du type CM permet d'identifier $\mathcal{T}_{S_{\mathfrak{h},1}}$ à $\mathbb{G}_{m,S_{\mathfrak{h},1}}^{\text{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1},Z_{\mathfrak{h}})}$. Comme \mathcal{T} agit trivialement sur $\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}}$, on a donc

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h},1},*}^{\mathcal{T}_{S_{\mathfrak{h},1}}} \mathbb{Q}_\ell) = \left(\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h},1},*} \mathbb{Q}_\ell) \right) [(t_{\varphi'_+})_{\varphi \in \text{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1},Z_{\mathfrak{h}})}]$$

où $t_{\varphi'_+}$ est la classe de Chern du fibré en droites sur le classifiant $[S_{\mathfrak{h},1}/\mathcal{T}_{S_{\mathfrak{h},1}}]$ obtenu en poussant le $\mathcal{T}_{S_{\mathfrak{h},1}}$ -torseur universel par le caractère $\chi_{\varphi'_+}$.

Notons $\chi_{\varphi'_+}(\tilde{\mathcal{E}}_{12})$ le fibré en droites sur $\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h},1}}$ obtenu en poussant la restriction à $\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h},1}}$ du $\tilde{\mathcal{T}}$ -torseur $\tilde{\mathcal{E}}_{12}$ par le caractère $\chi_{\varphi'_+}$ et notons simplement

$$c_{\varphi'_+} : \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h},1},*} \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^{n+2}(g_{S_{\mathfrak{h},1},*} \mathbb{Q}_\ell)(1)$$

la flèche induite par sa première classe de Chern

$$c_1(\chi_{\varphi'_+}(\tilde{\mathcal{E}}_{12})) : \mathbb{Q}_{\ell,\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h},1}}} \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell,\mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h},1}}}[2](1).$$

Il s'agit alors de démontrer que la flèche de degré $2r$

$$\begin{aligned} \prod_{\varphi \in \text{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1},Z_{\mathfrak{h}})} (t_{\varphi'_+} + c_{\varphi'_+}) : & \left(\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h},1},*} \mathbb{Q}_\ell) \right) [(t_{\varphi'_+})_{\varphi \in \text{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1},Z_{\mathfrak{h}})}] \\ & \rightarrow \left(\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h},1},*} \mathbb{Q}_\ell) \right) [(t_{\varphi'_+})_{\varphi \in \text{Mor}_{S_{\mathfrak{h}}}(S_{\mathfrak{h},1},Z_{\mathfrak{h}})}](r) \end{aligned}$$

est injective (voir le lemme A.2.1), ce qui est évident. \square

Notre résultat principal concernant la cohomologie équivariante de \mathcal{M}_S au-dessus de l'ouvert $S_{\mathfrak{h}}$ de S est alors le suivant:

THÉORÈME 3.6.2. *Pour chacun des deux caractères endoscopiques $\kappa : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{\pm 1\}$, l'application de restriction*

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_{S_{\mathfrak{h},*}}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa \rightarrow \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h},*}}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa$$

est injective et son image est précisément le sous- $\mathbb{Q}_\ell[X^(\mathcal{T})(-1)]$ -module en faisceaux pervers gradués sur S*

$$L_{Z_{\mathfrak{h}}'/Z_{\mathfrak{h}}/S_{\mathfrak{h}}} \otimes_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h}}}} \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^{n-2r}(g_{S_{\mathfrak{h},*}}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa(-r) \subset \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h},*}}^{\mathcal{T}} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa.$$

Démonstration. Pour chaque entier n , ${}^p\mathcal{H}^n(f_{S_{\mathfrak{h},*}} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa$ est potentiellement pur de poids n d'après le corollaire 3.2.4. L'injectivité de la flèche de restriction est donc une conséquence du corollaire A.1.3.

Le reste de la démonstration du théorème fait l'objet des deux paragraphes qui suivent. \square

COROLLAIRE 3.6.3. *Pour chacun des deux caractères endoscopiques $\kappa : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{\pm 1\}$ il existe un isomorphisme de faisceaux pervers gradués sur $S_{\mathfrak{h}}$*

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_{S_{\mathfrak{h}},*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa \xrightarrow{\sim} L_{Z_{\mathfrak{h}}/Z_{\mathfrak{h}}/S_{\mathfrak{h}}} \otimes_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h}}}} \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^{n-2r}(g_{S_{\mathfrak{h}},*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa(-r).$$

Démonstration. D'après le théorème on a un isomorphisme de $\mathbb{Q}_\ell[X^*(\mathcal{T})(-1)]$ -modules en faisceaux pervers gradués sur S :

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_{S_{\mathfrak{h}},*}^T\mathbb{Q}_\ell)_\kappa \xrightarrow{\sim} L_{Z_{\mathfrak{h}}/Z_{\mathfrak{h}}/S_{\mathfrak{h}}} \otimes_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h}}}} \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^{n-2r}(g_{S_{\mathfrak{h}},*}^T\mathbb{Q}_\ell)_\kappa(-r).$$

De plus, compte tenu de la pureté l'isomorphisme canonique

$$f_{S_{\mathfrak{h}},*}\mathbb{Q}_\ell_{S_{\mathfrak{h}}} = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h}}}}^L f_{S_{\mathfrak{h}},*}^T\mathbb{Q}_\ell$$

induit une suite spectrale dont la partie κ dégénère en un isomorphisme

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_{S_{\mathfrak{h}},*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa \cong \mathbb{Q}_\ell_{S_{\mathfrak{h}}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell[X^*(\mathcal{T})(-1)]} \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_{S_{\mathfrak{h}},*}^T\mathbb{Q}_\ell)_\kappa.$$

De même, il existe un isomorphisme

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h}},*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa \cong \mathbb{Q}_\ell_{S_{\mathfrak{h}}} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell[X^*(\mathcal{T})(-1)]} \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S_{\mathfrak{h}},*}^T\mathbb{Q}_\ell)_\kappa,$$

d'où le corollaire. □

3.7. *Une construction à la Altman et Kleiman.* Nous aurons besoin d'une construction inspirée des espaces de modules de présentations d'Altman et Kleiman (cf. [Al-Kl 2]).

Notons

$$S_{\mathfrak{h},1} \subset \overbrace{Z_{\mathfrak{h}} \times_{S_{\mathfrak{h}}} Z_{\mathfrak{h}} \cdots \times_{S_{\mathfrak{h}}} Z_{\mathfrak{h}}}^r$$

le sous-schéma ouvert et fermé du produit fibré formé des $\underline{z} = (z_1, \dots, z_r)$ tels que $z_i \neq z_j$ pour tous $i \neq j$. C'est un $S_{\mathfrak{h}}$ -schéma fini étale de degré $r!$ qui, par changement de base, déploie complètement le revêtement fini étale $Z_{\mathfrak{h}} \rightarrow S_{\mathfrak{h}}$.

Pour tout point géométrique $\underline{z} = (z_1, \dots, z_r)$ de $S_{\mathfrak{h},1}$ d'image b dans $S_{\mathfrak{h}}$ et tout $i = 0, 1, \dots, r$, on considère la courbe $Y_{\underline{z}}^{[i]}$ déduite de Y_b en normalisant cette courbe en les points $z_{i+1}, \dots, z_r \in Z_b = Y_{1,b} \cap Y_{2,b}$. On a donc $Y_{\underline{z}}^{[0]} = Y_{1,b} \amalg Y_{2,b}$ et $Y_{\underline{z}}^{[r]} = Y_b$, et pour chaque $i = 0, 1, \dots, r$, la courbe $Y_{\underline{z}}^{[i]}$ est une normalisation partielle de $Y_{\underline{z}}^{[i+1]}$ qui a pour composantes $Y_{1,b}$ et $Y_{2,b}$, composantes dont l'intersection est réduite à $\{z_1, \dots, z_i\}$ et qui se coupent transversalement en ces points.

$$\begin{array}{ccccccc} Y_{1,b} \amalg Y_{2,b} = Y_{\underline{z}}^{[0]} & \longrightarrow & Y_{\underline{z}}^{[1]} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Y_{\underline{z}}^{[r]} = Y_b \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & S_{\mathfrak{h},1}. \end{array}$$

On a aussi le revêtement étale double

$$Y_{\underline{z}}'^{[i]} = X' \times_X Y_{\underline{z}}^{[i]} \rightarrow Y_{\underline{z}}^{[i]}.$$

Pour i fixé et \underline{z} variable, les courbes $Y_{\underline{z}}^{[i]}$ et leurs revêtements étales doubles ci-dessus se mettent naturellement en famille sur $S_{\mathfrak{h},1}$. On peut donc former le $S_{\mathfrak{h},1}$ -champ algébrique $\mathcal{M}^{[i]}$ dont les points géométriques sont les triplets $(\underline{z}, \mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]})$ où \underline{z} est un point géométrique de $S_{\mathfrak{h},1}$, $\mathcal{F}^{[i]}$ est un module sans torsion de rang 1 sur $Y_{\underline{z}}'^{[i]}$ et $\iota^{[i]} : \mathcal{F}^{[i]} \xrightarrow{\sim} \tau^*(\mathcal{F}^{[i]})^\vee$ est une structure unitaire.

On a $\mathcal{M}^{[0]} = S_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h}}} \mathcal{N}_{S_{\mathfrak{h}}}$ et $\mathcal{M}^{[r]} = S_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h}}} \mathcal{M}_{S_{\mathfrak{h}}}$ et on a des immersions fermées de $S_{\mathfrak{h},1}$ -champs algébriques

$$\mathcal{M}^{[0]} \xrightarrow{c^{i[0]}} \mathcal{M}^{[1]} \xrightarrow{c^{i[1]}} \mathcal{M}^{[2]} \dots \xrightarrow{c^{i[r-1]}} \mathcal{M}^{[r]}$$

induites par les foncteurs d'image directe pour les normalisations partielles $Y_{\underline{z}}^{[i]} \rightarrow Y_{\underline{z}}^{[i+1]}$. Le composé de ces immersions fermées n'est autre que le changement de base par $S_{\mathfrak{h},1} \rightarrow S_{\mathfrak{h}} \subset S$ de l'immersion fermée $\mathcal{N}_S \hookrightarrow \mathcal{M}_S$ considérée précédemment.

Bien sûr, pour chaque $i = 0, 1, \dots, r$ on peut définir pareillement le $S_{\mathfrak{h},1}$ -schéma en groupes $P^{[i]}$ des modules inversibles unitaires sur la famille des $Y_{\underline{z}}'^{[i]}$ et on a une action par produit tensoriel de $P^{[i]}$ sur $\mathcal{M}^{[i]}$. On a des homomorphismes

$$P^{[r]} \rightarrow \dots \rightarrow P^{[1]} \rightarrow P^{[0]}$$

et, compte tenu de ces homomorphismes, pour chaque $i = 0, 1, \dots, r - 1$, l'immersion fermée $i^{[i]}$ ci-dessus est $P^{[i+1]}$ -équivariante.

Le $S_{\mathfrak{h},1}$ -tore $\mathcal{T}^{[r]} := S_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h}}} \mathcal{T}$ se décompose naturellement en un produit

$$\mathcal{T}^{[r]} = \mathcal{T}_1 \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \mathcal{T}_2 \cdots \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \mathcal{T}_r,$$

où \mathcal{T}_i est le noyau de l'homomorphisme $P^{[i]} \rightarrow P^{[i-1]}$ et est le changement de base par la i -ème projection $S_{\mathfrak{h},1} \rightarrow Z_{\mathfrak{h}}$ du tore

$$(\pi_* \mathbb{G}_{m, Z_{\mathfrak{h}}'})^{\tau^* = (-)^{-1}}$$

où π désigne ici le morphisme naturel $Z_{\mathfrak{h}}' \rightarrow Z_{\mathfrak{h}}$.

Notons

$$S'_{\mathfrak{h},1} \subset \overbrace{Z'_{\mathfrak{h}} \times_{S_{\mathfrak{h}}} Z'_{\mathfrak{h}} \cdots \times_{S_{\mathfrak{h}}} Z'_{\mathfrak{h}}}^r$$

le sous-schéma ouvert et fermé du produit fibré formé des $\underline{z}' = (z'_1, \dots, z'_r)$ dont l'image \underline{z} dans $Z_{\mathfrak{h}} \times_{S_{\mathfrak{h}}} Z_{\mathfrak{h}} \cdots \times_{S_{\mathfrak{h}}} Z_{\mathfrak{h}}$ est dans $S_{\mathfrak{h},1}$. C'est un revêtement fini étale de $S_{\mathfrak{h},1}$ de degré 2^r .

Pour chaque $i = 0, 1, \dots, r - 1$, considérons le $S'_{\mathfrak{h},1}$ -champ algébrique $\mathcal{M}'^{[i,i+1]}$ des

$$(\underline{z}', (\mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]}), (\varepsilon : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F}^{[i,i+1]}))$$

où:

- 1) z' est un point de $S'_{\mathfrak{q},1}$, d'image z dans $S_{\mathfrak{q},1}$ et d'image b dans $S_{\mathfrak{q}}$,
- 2) le couple $(z', (\mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]}))$ est un point de $\mathcal{M}^{[i]}$,
- 3) ε est une modification élémentaire inférieure en z'_{i+1} de $\mathcal{F}^{[i,i+1]}$, c'est-à-dire d'un homomorphisme injectif de $\mathcal{O}_{Y'_{z'}^{[i+1]}}$ -modules

$$\varepsilon : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F}^{[i,i+1]}$$

où:

- $(\mathcal{F}^{[i,i+1]}, \iota^{[i,i+1]})$ est l'image directe par le morphisme de normalisation partielle $Y'_{z'}^{[i]} \rightarrow Y'_{z'}^{[i+1]}$ de $(\mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]})$,
- \mathcal{G} est un module sans torsion de rang 1 sur $Y'_{z'}^{[i+1]}$,
- $\text{Coker}(\varepsilon)$ est de longueur 1 et à support dans $\{z'_{i+1}\}$.

L'oubli de ε est une fibration en droites projectives

$$p'^{[i,i+1]} : \mathcal{M}'^{[i,i+1]} \rightarrow S'_{\mathfrak{q},1} \times_{S_{\mathfrak{q},1}} \mathcal{M}^{[i]}$$

donc on a deux sections

$$\sigma_1^{[i]}, \sigma_2^{[i]} : S'_{\mathfrak{q},1} \times_{S_{\mathfrak{q},1}} \mathcal{M}^{[i]} \rightarrow \mathcal{M}'^{[i,i+1]}$$

définies comme suit: soient $\alpha \in \{1, 2\}$ et $(z', (\mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]}))$ un point de $S'_{\mathfrak{q},1} \times_{S_{\mathfrak{q},1}} \mathcal{M}^{[i]}$, on définit la modification inférieure élémentaire

$$\varepsilon_{\alpha} : \mathcal{G}_{\alpha} \hookrightarrow \mathcal{F}^{[i,i+1]}$$

qui intervient dans $\sigma_1^{[\alpha]}(z', (\mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]}))$ en prenant l'image directe par la normalisation partielle $Y'_{z'}^{[i]} \rightarrow Y'_{z'}^{[i+1]}$ de la modification élémentaire

$$\mathcal{F}^{[i]}(-[z'_{i+1,\alpha}]) \hookrightarrow \mathcal{F}^{[i]}$$

où $z'_{i+1,\alpha}$ est l'unique point lisse de $Y'_{\alpha,b}$ au-dessus du point double z'_{i+1} de $Y'_{z'}^{[i+1]}$.

On définit un morphisme de $S'_{\mathfrak{q},1}$ -champs algébriques

$$\rho'^{[i,i+1]} : \mathcal{M}'^{[i,i+1]} \rightarrow S'_{\mathfrak{q},1} \times_{S_{\mathfrak{q},1}} \mathcal{M}^{[i+1]}$$

en envoyant $(z', (\mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]}), \varepsilon : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F}^{[i,i+1]})$ sur $(z', \mathcal{F}^{[i+1]}, \iota^{[i+1]})$ où $\mathcal{F}^{[i+1]}$ est la somme amalgamée de la modification inférieure $\varepsilon : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F}^{[i,i+1]}$ en z'_{i+1} et de la modification supérieure $(\tau^* \varepsilon^{\vee}) \circ \iota^{[i,i+1]} : \mathcal{F}^{[i,i+1]} \hookrightarrow \tau^* \mathcal{G}^{\vee}$ en $\tau(z'_{i+1}) \neq z'_{i+1}$, et où $\iota^{[i+1]}$ est la structure unitaire évidente.

Le lemme suivant est une variante du théorème 18 de [Al-Kl 2] et on renvoie à cette référence pour les détails de sa démonstration.

LEMME 3.7.1. *Le morphisme $\rho'^{[i,i+1]} : \mathcal{M}'^{[i,i+1]} \rightarrow S'_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \mathcal{M}^{[i+1]}$ est un pincement de $\mathcal{M}'^{[i,i+1]}$ identifiant les deux sections*

$$\sigma_1^{[i]}, \sigma_2^{[i]} : S'_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \mathcal{M}^{[i]} \rightarrow \mathcal{M}'^{[i,i+1]}$$

de $p'^{[i,i+1]}$. Plus précisément,

- $\rho'^{[i,i+1]}$ est fini,
- l'image réciproque par $\rho'^{[i,i+1]}$ de l'image de l'immersion fermée $S'_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h},1}} i^{[i]} : S'_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \mathcal{M}^{[i]} \hookrightarrow S'_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \mathcal{M}^{[i+1]}$ est la réunion des images des deux sections $\sigma_1^{[i]}$ et $\sigma_2^{[i]}$,
- $\rho'^{[i,i+1]}$ est un isomorphisme en dehors des images de ces deux sections,
- il existe deux sections globales $h_1^{[i]}$ et $h_2^{[i]}$ du $S'_{\mathfrak{h},1}$ -schéma en groupes $S'_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h},1}} P^{[i]}$ induisant des automorphismes de $S'_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \mathcal{M}^{[i]}$ notés aussi $h_1^{[i]}$ et $h_2^{[i]}$, tels que le carré

$$\begin{array}{ccc} S'_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \mathcal{M}^{[i]} & \xrightarrow{\sigma_\alpha^{[i]}} & \mathcal{M}'^{[i,i+1]} \\ h_\alpha^{[i]} \downarrow & & \downarrow \rho'^{[i,i+1]} \\ S'_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \mathcal{M}^{[i]} & \xrightarrow{i^{[i]}} & S'_{\mathfrak{h},1} \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \mathcal{M}^{[i+1]} \end{array}$$

soit commutatif pour $\alpha = 1, 2$.

Démonstration. Pour $\alpha = 1, 2$, on a une structure unitaire évidente induite par $\iota^{[i]}$ sur le module sans torsion de rang 1, $\mathcal{F}^{[i]}([\tau(z'_{i+1,\alpha})] - [z'_{i+1,\alpha}])$, structure que l'on note $\iota^{[i]}([\tau(z'_{i+1,\alpha})] - [z'_{i+1,\alpha}])$. Avec cette notation on a

$$\begin{aligned} & \rho'^{[i,i+1]} \circ \sigma_\alpha^{[i]}(\underline{z}', \mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]}) \\ &= \left(\underline{z}', (Y_{\underline{z}}^{[i]} \rightarrow Y_{\underline{z}}^{[i+1]})_* (\mathcal{F}^{[i]}([\tau(z'_{i+1,\alpha})] - [z'_{i+1,\alpha}]), \iota^{[i]}([\tau(z'_{i+1,\alpha})] - [z'_{i+1,\alpha}])) \right) \end{aligned}$$

pour $\alpha = 1, 2$ et

$$i^{[i]}(\underline{z}', \mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]}) = (\underline{z}', (Y_{\underline{z}}^{[i]} \rightarrow Y_{\underline{z}}^{[i+1]})_* (\mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]}))$$

de sorte que la section $h_\alpha^{[i]}$ qui envoie \underline{z}' sur $\mathcal{O}_{Y_{\underline{z}}^{[i]}}([\tau(z'_{i+1,\alpha})] - [z'_{i+1,\alpha}])$ muni de sa structure unitaire évidente, répond à la question. \square

Par dualité et fonctorialité on a une modification élémentaire supérieure en $\tau(z'_{i+1})$

$$(\tau^* \varepsilon^\vee) \circ \iota^{[i,i+1]} : \mathcal{F}^{[i,i+1]} \hookrightarrow \tau^* \mathcal{G}^\vee.$$

Si on note (par abus) $[2z'_{i+1}]$ le diviseur de Cartier sur $Y_{\underline{z}}'^{[i+1]}$ induit par la fibre de $Y_{\underline{z}}'^{[i+1]} \rightarrow \kappa(b) \otimes_k X'$ passant par le point z'_{i+1} , dans un voisinage suffisamment petit de z'_{i+1} (on veut éviter les autres z'_j et $\tau(z'_j)$ qui pourrait être sur cette fibre), le $\mathcal{O}_{Y_{\underline{z}}'^{[i+1]}}$ -Module inversible $\mathcal{O}_{Y_{\underline{z}}'^{[i+1]}}(-[2z'_{i+1}])$ est un idéal de co-longueur 2 de $\mathcal{O}_{Y_{\underline{z}}'^{[i+1]}}$ et le morphisme canonique

$$\tau^*(\mathcal{G}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\underline{z}}'^{[i+1]}}} \mathcal{O}_{Y_{\underline{z}}'^{[i+1]}}(-[2z'_{i+1}])) \hookrightarrow \tau^*\mathcal{G}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\underline{z}}'^{[i+1]}}} \mathcal{O}_{Y_{\underline{z}}'^{[i+1]}} = \tau^*\mathcal{G}^\vee$$

se factorise en une modification élémentaire inférieure en $\tau(z'_{i+1})$

$$\varepsilon^\tau : \mathcal{G}^\tau := \tau^*(\mathcal{G}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{\underline{z}}'^{[i+1]}}} \mathcal{O}_{Y_{\underline{z}}'^{[i+1]}}(-[2z'_{i+1}])) \hookrightarrow \mathcal{F}^{[i,i+1]}$$

suivi de $(\tau^*\varepsilon^\vee) \circ \iota^{[i,i+1]}$.

On munit $\mathcal{M}^{[i,i+1]}$ de la données de descente, relativement à $S'_{\mathfrak{h},1} \rightarrow S_{\mathfrak{h},1}$, qui est définie par l'involution τ envoyant $(\underline{z}', \mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]}, \varepsilon : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F}^{[i,i+1]})$ sur

$$(\tau(z'), \mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]}, \varepsilon^\tau : \mathcal{G}^\tau \hookrightarrow \mathcal{F}^{[i,i+1]}).$$

Remarquons que les sections $\sigma_1^{[i]}$ et $\sigma_2^{[i]}$ ci-dessus sont échangées par cette involution.

On a donc un $S_{\mathfrak{h},1}$ -champ algébrique $\mathcal{M}^{[i,i+1]}$ dont le changement de base par $S'_{\mathfrak{h},1} \rightarrow S_{\mathfrak{h},1}$ est $\mathcal{M}'^{[i,i+1]}$ et un morphisme d'oubli

$$p^{[i,i+1]} : \mathcal{M}^{[i,i+1]} \rightarrow \mathcal{M}^{[i]}$$

qui est une fibration en droites projectives « tordues ». Les points géométriques de $\mathcal{M}^{[i,i+1]}$ sont les uplets

$$(z, \mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]}, \varepsilon' : \mathcal{G}' \hookrightarrow \mathcal{F}^{[i,i+1]}, \varepsilon'' : \mathcal{G}'' \hookrightarrow \mathcal{F}^{[i,i+1]})$$

formés d'un point géométrique \underline{z} de $S_{\mathfrak{h},1}$ d'image b dans $S_{\mathfrak{h}}$, de $(\mathcal{F}^{[i]}, \iota^{[i]})$ comme ci-dessus et de deux modifications élémentaires inférieures ε' et ε'' en z'_{i+1} et z''_{i+1} respectivement, où $\{z'_{i+1}, z''_{i+1}\}$ est la fibre de $Z'_\mathfrak{h} \rightarrow Z_\mathfrak{h}$ en z_{i+1} , modifications qui vérifient la compatibilité

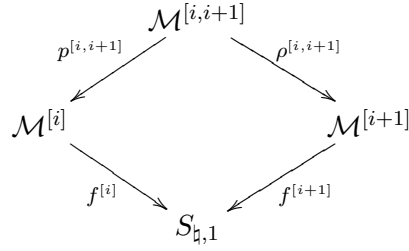
$$\varepsilon'\tau = \iota^{[i,i+1]} \circ \varepsilon''.$$

Le morphisme $\rho'^{[i,i+1]}$ se descend un morphisme de $S_{\mathfrak{h},1}$ -champs algébriques

$$\rho^{[i,i+1]} : \mathcal{M}^{[i,i+1]} \rightarrow \mathcal{M}^{[i+1]}.$$

3.8. *Preuve du théorème sur l'ouvert $S_{\mathfrak{h}}$.* Pour terminer la démonstration du théorème 3.6.2, il suffit de le faire après avoir remplacé $S_{\mathfrak{h}}$ par un revêtement fini étale.

On peut donc se placer sur $S_{\mathfrak{h},1}$ et utiliser la construction à la Altman et Kleiman de la section précédente



où on a noté $f^{[i]}$ la projection canonique de $\mathcal{M}^{[i]}$ sur $S_{\mathfrak{h},1}$.

On vérifie que

$$L_{Z_{\mathfrak{h}}' \times_{S_{\mathfrak{h}}} S_{\mathfrak{h},1} / Z_{\mathfrak{h}} \times_{S_{\mathfrak{h}}} S_{\mathfrak{h},1} / S_{\mathfrak{h},1}} = L_1 \otimes_{S_{\mathfrak{h},1}} L_2 \otimes_{S_{\mathfrak{h},1}} \cdots \otimes_{S_{\mathfrak{h},1}} L_r$$

où $L_i \subset X^*(\mathcal{T}_i)$ est l'image réciproque par la i -ème projection $S_{\mathfrak{h},1} \rightarrow Z_{\mathfrak{h}}$ de $L_{Z_{\mathfrak{h}}' / Z_{\mathfrak{h}} / Z_{\mathfrak{h}}}$. On note

$$L^{[i]} = L_1 \otimes_{S_{\mathfrak{h},1}} L_2 \otimes_{S_{\mathfrak{h},1}} \cdots \otimes_{S_{\mathfrak{h},1}} L_i \subset \text{Sym}_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h},1}}}^i (X^*(\mathcal{T}^{[i]})).$$

où $\mathcal{T}^{[i]} = \mathcal{T}_1 \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \mathcal{T}_2 \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \cdots \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \mathcal{T}_i$.

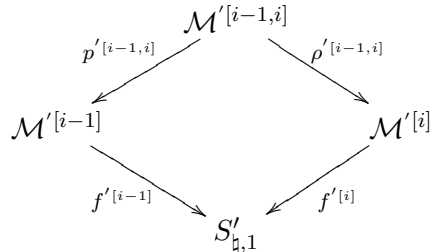
On montre alors par récurrence sur $i = 0, 1, \dots, r$ que, pour chacun des deux caractères endoscopiques $\kappa : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{\pm 1\}$, la flèche de restriction le long de l'immersion fermée $i^{[i-1]} \circ \dots \circ i^{[1]} \circ i^{[0]} : \mathcal{M}^{[0]} \hookrightarrow \mathcal{M}^{[i]}$,

$$\bigoplus_n \text{p}\mathcal{H}^n((f^{[i]})_*^{\mathcal{T}^{[i]}} \mathbb{Q}_{\ell})_{\kappa} \rightarrow \bigoplus_n \text{p}\mathcal{H}^n((f^{[0]})_*^{\mathcal{T}^{[i]}} \mathbb{Q}_{\ell})_{\kappa}$$

est injective et que son image est précisément le sous- $\mathbb{Q}_{\ell}[X^*(\mathcal{T}^{[i]})(-1)]$ -module en faisceaux pervers gradués sur S :

$$L^{[i]} \otimes_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h},1}}} \bigoplus_n \text{p}\mathcal{H}^{n-2i}((f^{[0]})_*^{\mathcal{T}^{[i]}} \mathbb{Q}_{\ell})_{\kappa}(-i) \subset \bigoplus_n \text{p}\mathcal{H}^n((f^{[0]})_*^{\mathcal{T}^{[i]}} \mathbb{Q}_{\ell})_{\kappa}.$$

Le cran $i = 0$ de la récurrence étant tautologique, il suffit de déduire le cran i du cran $i - 1$. Après le changement de base $S_{\mathfrak{h},1}' \rightarrow S_{\mathfrak{h},1}$ le diagramme de champs ci-dessus devient un diagramme



où $p'^{[i-1,i]}$ est maintenant un fibré en droites projectives non tordues munies de deux sections $\sigma_1^{[i-1]}$ et $\sigma_2^{[i-1]}$, où $S_{\mathfrak{h},1}' \times_{S_{\mathfrak{h},1}} \mathcal{T}_i = \mathbb{G}_{m,S_{\mathfrak{h},1}'}$ agit par homothéties

en fixant ces deux sections et où $\rho'^{[i-1,i]}$ est un pincement $\mathbb{G}_{m,S'_{\mathfrak{h},1}}$ -équivariant de ce fibré projectif le long de ces deux sections. On se retrouve en fait dans une situation du type de celle considérée dans la section (A.2).

Il résulte donc de la proposition A.2.5 que la flèche de restriction le long de l'immersion fermée $i'^{[i-1]} : \mathcal{M}'^{[i-1]} \hookrightarrow \mathcal{M}'^{[i]}$

$$\begin{aligned} \bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^n((f'^{[i]})_*^{\mathbb{G}_{m,S'_{\mathfrak{h},1}}} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa &\rightarrow \bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^n((f'^{[i-1]})_*^{\mathbb{G}_{m,S'_{\mathfrak{h},1}}} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa \\ &= \left(\bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^n((f'^{[i-1]})_* \mathbb{Q}_\ell)_\kappa \right) [t_i] \end{aligned}$$

est injective et que son image est précisément le sous- $\mathbb{Q}_\ell[t_i]$ -module en faisceaux pervers gradués sur S

$$(t_i + c_i) \left(\bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^n((f'^{[i-1]})_* \mathbb{Q}_\ell)_\kappa \right) [t_i] \subset \left(\bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^n((f'^{[i-1]})_* \mathbb{Q}_\ell)_\kappa \right) [t_i]$$

où c_i est la classe de Chern, notée c_S dans (A.2), du fibré vectoriel définissant le fibré projectif $p'^{[i-1,i]}$. On rappelle que l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_{z'_{i+1}}^{[i,i+1]}) = \mathbb{P}(\mathcal{F}_{z'_{i+1,1}}^{[i]} \oplus \mathcal{F}_{z'_{i+1,2}}^{[i]}) = \mathbb{P}((\mathcal{F}_{z'_{i+1,1}}^{[i]} \otimes (\mathcal{F}_{z'_{i+1,2}}^{[i]})^{\otimes -1}) \oplus \kappa(z'_{i+1})).$$

Par descente de $S'_{\mathfrak{h},1}$ à $S_{\mathfrak{h},1}$ on en déduit que la flèche de restriction le long de l'immersion fermée $i^{[i-1]} : \mathcal{M}^{[i-1]} \hookrightarrow \mathcal{M}^{[i]}$

$$\bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^n((f^{[i]})_*^{\mathcal{T}_i} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa \rightarrow \bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^n((f^{[i-1]})_*^{\mathcal{T}_i} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa$$

est injective et que son image est précisément le sous- $\mathbb{Q}_\ell[X^*(\mathcal{T}_i)(-1)]$ -module en faisceaux pervers gradués sur S

$$L_i \otimes_{\mathbb{Z}_{S_{\mathfrak{h},1}}} \bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^{n-2}((f^{[i-1]})_*^{\mathcal{T}_i} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa(-1) \subset \bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^n((f^{[i-1]})_*^{\mathcal{T}_i} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa.$$

On conclut enfin la récurrence et donc la preuve du théorème 3.6.2 par une formule de Künneth.

3.9. L'argument de déformation. Résumons la situation. Au-dessus de l'hensélisé S de \mathbb{A}_H en le point $a \in \mathbb{A}_H(k)$, on a deux morphismes propres $f_S : \mathcal{M}_S \rightarrow S$ et $g_S : \mathcal{N}_S \rightarrow S$.

Comme \mathcal{N}_S est formellement lisse sur k , chaque faisceau de cohomologie perverse $\mathrm{p}\mathcal{H}^n(g_{S,*} \mathbb{Q}_\ell)$ est potentiellement pur de poids n et il en est de même de sa partie κ , $\mathrm{p}\mathcal{H}^n(g_{S,*} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa$, pour n'importe quel caractère κ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. En particulier, les faisceaux pervers $\mathrm{p}\mathcal{H}^n(g_{S,*} \mathbb{Q}_\ell)$ et $\mathrm{p}\mathcal{H}^n(g_{S,*} \mathbb{Q}_\ell)_\kappa$ sur S sont géométriquement semi-simples.

On a de plus l'action du groupe discret \mathbb{Z}^2 sur \mathcal{M}_S pour laquelle l'action induite de \mathbb{Z}^2 sur chaque faisceau de cohomologie perverse $\mathrm{p}\mathcal{H}^n(f_{S,*} \mathbb{Q}_\ell)$ se factorise à travers le quotient $\mathbb{Z}^2 \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Bien que \mathcal{M}_S ne soit pas

formellement lisse sur k , on sait que, pour chacun des deux caractères endoscopiques κ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et chaque entier n la partie κ -isotypique ${}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$ de ${}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)$ est potentiellement pure de poids n . En particulier, cette partie κ -isotypique est un faisceau pervers géométriquement semi-simple.

On a enfin une action du S -tore T sur \mathcal{M}_S qui commute à l'action de \mathbb{Z}^2 et dont le lieu des points fixes est le fermé image de \mathcal{N}_S dans \mathcal{M}_S . On peut donc considérer les faisceaux pervers gradués de cohomologie T -équivariante

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}^T\mathbb{Q}_\ell) \text{ et } \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S,*}^T\mathbb{Q}_\ell)$$

et leur parties κ -isotypiques

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}^T\mathbb{Q}_\ell)_\kappa \text{ et } \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S,*}^T\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$$

pour n'importe quel caractère κ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Ce sont des faisceaux en modules gradués sur le faisceau en \mathbb{Q}_ℓ -algèbres graduées $\mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)] = \text{Sym}(X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}_S} \mathbb{Q}_\ell, S(-1))$ sur S .

Fixons un caractère endoscopique κ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Comme T agit trivialement sur \mathcal{N}_S , on a

$$N := \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S,*}^T\mathbb{Q}_\ell)_\kappa = \mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)] \otimes_{\mathbb{Q}_\ell, S} \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$$

et, tout comme $\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$, N est un faisceau pervers gradué géométriquement semi-simple.

La pureté des ${}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$ implique que la flèche de restriction

$$M := \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}^T\mathbb{Q}_\ell)_\kappa \rightarrow \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_{S,*}^T\mathbb{Q}_\ell)_\kappa = N$$

est injective, que tout comme $\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$, M est un faisceau pervers gradué géométriquement semi-simple, et que

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)]} M.$$

PROPOSITION 3.9.1. *Pour tout point géométrique b de S il existe un trait strictement hensélien V de point fermé v et de point générique η et un morphisme de schémas $\varphi : V \rightarrow S$ tel que*

- $\varphi(v) = b$ et $\varphi(\eta) \in S_{\mathfrak{q}} \subset S$,
- φ^*N est à cohomologie ordinaire constante.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.9.1. □

COROLLAIRE 3.9.2. *Si $j : S_{\mathfrak{q}} \hookrightarrow S$ est l'inclusion, on a*

$$M = j_{!*}j^*M \text{ et } N = j_{!*}j^*N$$

et aussi

$${}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa = j_{!*}j^*{}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa \text{ et } {}^p\mathcal{H}^n(g_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa = j_{!*}j^*{}^p\mathcal{H}^n(g_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa$$

quel que soit l'entier n .

Démonstration. Comme M (resp. N) est pervers la flèche d'oubli des supports ${}^p\mathcal{H}^0(j_{!*}j^*M) \rightarrow {}^p\mathcal{H}^0(j_*j^*M)$ (resp. ${}^p\mathcal{H}^0(j_{!*}j^*N) \rightarrow {}^p\mathcal{H}^0(j_*j^*N)$) se factorise en

$${}^p\mathcal{H}^0(j_{!*}j^*M) \rightarrow M \rightarrow {}^p\mathcal{H}^0(j_*j^*M) \text{ (resp. } {}^p\mathcal{H}^0(j_{!*}j^*N) \rightarrow N \rightarrow {}^p\mathcal{H}^0(j_*j^*N) \text{)}$$

et il s'agit donc de démontrer que les flèches de faisceaux pervers ${}^p\mathcal{H}^0(j_{!*}j^*M) \rightarrow M$ et ${}^p\mathcal{H}^0(j_{!*}j^*N) \rightarrow N$ sont surjectives et que les flèches de faisceaux pervers $M \rightarrow {}^p\mathcal{H}^0(j_*j^*M)$ et $N \rightarrow {}^p\mathcal{H}^0(j_*j^*N)$ sont injectives. Le problème est de nature géométrique et on peut donc remplacer S par son hensélisé strict, ou ce qui revient au même supposer que M et N qui sont *a priori* géométriquement semi-simples, sont en fait semi-simples.

Pour tout \mathbb{Q}_ℓ -faisceau pervers irréductible K sur S dont le support rencontre l'ouvert $S_{\mathfrak{q}}$, on a bien sûr $K = j_{!*}j^*K$. Il s'agit donc de démontrer que N , et donc *a fortiori* M , n'a pas de sous-objet simple K dont le support dans S ne rencontre pas $S_{\mathfrak{q}}$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un tel K . Soit b un point géométrique de S tel que la fibre de K en b soit non nulle. Prenons alors un morphisme $\varphi : V \rightarrow S$ comme dans la proposition. Alors, φ^*K est un facteur direct de φ^*N et est donc à cohomologie ordinaire constante. Par suite le support de K rencontre $S_{\mathfrak{q}}$, d'où une contradiction. \square

Rassemblant les résultats de ce corollaire et ceux obtenus sur l'ouvert $S_{\mathfrak{q}}$, on obtient finalement

THÉORÈME 3.9.3. *Pour $\kappa : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rightarrow \{\pm 1\}$ endoscopique on a un isomorphisme de faisceaux pervers gradués sur S*

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa \xrightarrow{\sim} L_{Z'/Z/S} \otimes_{\mathbb{Z}_S} \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^{n-2r}(g_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa(-r). \quad \square$$

3.10. *Comptage de points rationnels et le théorème global.* Pour $\kappa : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rightarrow \{\pm 1\}$ endoscopique on vient de terminer la construction d'un isomorphisme de faisceaux pervers gradués sur S :

$$(*) \quad \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa \xrightarrow{\sim} L_{Z'/Z/S} \otimes_{\mathbb{Z}_S} \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^{n-2r}(g_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa(-r).$$

Nous allons maintenant déduire une conséquence numérique de cet isomorphisme.

Soit \bar{s} le point géométrique de S , localisé au point fermé s de S défini par une clôture algébrique \bar{k} de $k = \mathbb{F}_q = \kappa(s)$. On note comme d'habitude Frob_s l'endomorphisme de Frobenius géométrique en s .

LEMME 3.10.1. *On a les deux égalités*

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} (-1)^{m+n} \text{Tr}(\text{Frob}_s, H^m(({}^p\mathcal{H}^n(f_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa)_{\bar{s}})) \\ = \sum_n (-1)^n \text{Tr}(\text{Frob}_s, H^n(\mathcal{M}_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)_\kappa) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} (-1)^{m+n} \text{Tr}(\text{Frob}_s, H^m(({}^p\mathcal{H}^n(g_{S,*}\mathbb{Q}_\ell)_\kappa)_{\bar{s}})) \\ = \sum_n (-1)^n \text{Tr}(\text{Frob}_s, H^n(\mathcal{N}_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)_\kappa). \end{aligned}$$

Démonstration. Considérons la catégorie abélienne \mathcal{A} des \mathbb{Q}_ℓ -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ et d'une action de \mathbb{Z}^2 qui commute à l'action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ et dont la restriction à $2\mathbb{Z}^2$ est unipotente. Considérons aussi la catégorie abélienne \mathcal{A}^{ss} des \mathbb{Q}_ℓ -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ et d'une action de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ qui commute à l'action de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$. La flèche

$$K_0(\mathcal{A}^{\text{ss}}) \rightarrow K_0(\mathcal{A})$$

induite par l'inclusion de \mathcal{A}^{ss} dans \mathcal{A} est un isomorphisme.

Pour tout caractère $\kappa : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rightarrow \{\pm 1\} \subset \mathbb{Q}_\ell^\times$ et tout objet V de \mathcal{A} on définit

$$\text{Tr}_\kappa^{\text{ss}}(\text{Frob}_q, V) \in \mathbb{Q}_\ell$$

comme suit: V définit un élément $[V]$ de $K_0(\mathcal{A})$ donc un élément $[V]^{\text{ss}}$ de $K_0(\mathcal{A}^{\text{ss}})$ et on pose

$$\text{Tr}_\kappa^{\text{ss}}(\text{Frob}_q, V) = \text{Tr}_\kappa(\text{Frob}_q, [V]^{\text{ss}}).$$

L'objet $C = f_{S,*}\mathbb{Q}_\ell$ de la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux ℓ -adiques sur S , est muni d'une action du groupe \mathbb{Z}^2 telle que le sous-groupe $2\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2$ agit trivialement sur $\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(C)$. En considérant les tronqués successifs de C pour la t -structure intermédiaire, on voit que $2\mathbb{Z}^2$ agit de manière unipotente sur C .

La fibre $C_{\bar{s}}$ de C en \bar{s} définit un élément

$$[C_{\bar{s}}] := \sum_n (-1)^n [H^n(C_{\bar{s}})] \in K_0(\mathcal{A})$$

qui est égal à

$$[C_{\bar{s}}] = \sum_n (-1)^n [H^n(\mathcal{M}_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)]$$

d'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre. De même la fibre $({}^p\mathcal{H}^n(C))_{\bar{s}}$ en \bar{s} de chaque faisceau de cohomologie perverse ${}^p\mathcal{H}^n(C)$ définit un élément

$$[({}^p\mathcal{H}^n(C))_{\bar{s}}] = \sum_m (-1)^m [H^m(({}^p\mathcal{H}^n(C))_{\bar{s}})] \in K_0(\mathcal{A}).$$

Maintenant, on a l'égalité

$$[C_{\bar{s}}] = \sum_n (-1)^n [({}^p\mathcal{H}^n(C))_{\bar{s}}]$$

dans $K_0(\mathcal{A})$, d'où l'égalité

$$\sum_n (-1)^n [({}^p\mathcal{H}^n(C))_{\bar{s}}] = \sum_n (-1)^n [H^n(\mathcal{M}_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)],$$

toujours dans $K_0(\mathcal{A})$, et par conséquent l'égalité

$$\sum_n (-1)^n \text{Tr}_\kappa^{\text{ss}}(\text{Frob}_q, ({}^p\mathcal{H}^n(C))_{\bar{s}}) = \sum_n (-1)^n \text{Tr}_\kappa^{\text{ss}}(\text{Frob}_q, H^n(\mathcal{M}_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell))$$

dans \mathbb{Q}_ℓ . On a en fait deux éléments virtuels de \mathcal{A}^{ss} qui, comme objets de \mathcal{A} , ont la même classe dans $K_0(\mathcal{A})$. Ils ont donc la même classe dans $K_0(\mathcal{A}^{\text{ss}})$.

Enfin, puisque $2\mathbb{Z}^2$ agit trivialement aussi bien sur les faisceaux pervers ${}^p\mathcal{H}^n(C)$ que sur les groupes de cohomologie ordinaires $H^n(\mathcal{M}_s, \mathbb{Q}_\ell)$, et puisque $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est un groupe fini, de sorte que l'on a

$$H^m(({}^p\mathcal{H}^n(C)_\kappa)_{\bar{s}}) = H^m(({}^p\mathcal{H}^n(C))_{\bar{s}})_\kappa,$$

on obtient la première égalité cherchée

$$\sum_{m,n} (-1)^{m+n} \text{Tr}(\text{Frob}_q, H^m(({}^p\mathcal{H}^n(C)_\kappa)_{\bar{s}})) = \sum_n (-1)^n \text{Tr}(\text{Frob}_q, H^n(\mathcal{M}_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)_\kappa).$$

La deuxième égalité se démontre de façon identique. □

Compte tenu de ce lemme, on déduit de l'isomorphisme (*) la proposition suivante.

PROPOSITION 3.10.2. *Pour $\kappa : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rightarrow \{\pm 1\}$ endoscopique on a l'égalité*

$$\begin{aligned} \sum_n (-1)^n \text{Tr}(\text{Frob}_s, H^n(\mathcal{M}_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)_\kappa) \\ = (-1)^{m_{Z'/Z/S}} q^r \sum_n (-1)^n \text{Tr}(\text{Frob}_s, H^n(\mathcal{N}_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)_\kappa) \end{aligned}$$

où $m_{Z'/Z/S}$ est l'entier de la section (3.4).

Nous allons maintenant récrire cette égalité à l'aide de la formule des points fixes de la section (A.3), ou plutôt sa variante champêtre appliquée aux k -champs \mathcal{M}_a muni de l'action du k -champ de Picard P_a , et \mathcal{N}_a muni de l'action du k -champ de Picard $P_{H,a}$.

Comme dorénavant nous ne considérons plus d'autres fibres des morphismes $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{A}$ et $\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{A}_H$ que celles en a , on peut alléger les notations en supprimant l'indice a . On a donc une courbe spectrale $Y \subset \Sigma$, notée précédemment Y_a , réunion de composantes géométriquement irréductibles Y_1 et Y_2 . On a de plus le revêtement double étale $\pi_Y : Y' = X' \times_X Y \rightarrow Y$ de composantes (géométriquement) irréductibles les $Y'_\alpha = X' \times_X Y_\alpha$ pour $\alpha = 1, 2$.

La catégorie $\mathcal{M}(\bar{k})$ a pour objets les couples $(\mathcal{F}, \iota_{\mathcal{F}})$ où \mathcal{F} est un $\mathcal{O}_{\bar{k} \otimes_k Y'}$ -module cohérent sans torsion de rang 1 et où $\iota_{\mathcal{F}} : \tau^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^\vee$ est une structure unitaire sur \mathcal{F} , les morphismes étant les isomorphismes de $\mathcal{O}_{\bar{k} \otimes_k Y'}$ -modules qui respectent les structures unitaires. La catégorie de Picard $P(\bar{k})$ a pour objet les couples $(\mathcal{G}, \iota_{\mathcal{G}})$ où maintenant \mathcal{G} est un $\mathcal{O}_{\bar{k} \otimes_k Y'}$ -module inversible et où $\iota : \tau^* \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^{\otimes -1}$ est une structure unitaire sur \mathcal{G} , et $P(\bar{k})$ agit sur $\mathcal{M}(\bar{k})$ par produit tensoriel.

La catégorie $\mathcal{N}(\bar{k})$ est quant à elle la sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}(\bar{k})$ dont les objets sont les couples $(\mathcal{F}, \iota_{\mathcal{F}})$ qui sont décomposés relativement au découpage $\bar{k} \otimes_k Y' = \bar{k} \otimes_k Y'_1 \cup \bar{k} \otimes_k Y'_2$. On a donc

$$\mathcal{N}(\bar{k}) = \mathcal{M}_1(\bar{k}) \times \mathcal{M}_2(\bar{k})$$

où la catégorie $\mathcal{M}_\alpha(\bar{k})$ est définie comme $\mathcal{M}(\bar{k})$ mais après avoir remplacé Y' par Y'_α . Si on pose $Q = P_{H,a}$ pour alléger les notations, la catégorie de Picard $Q(\bar{k}) = P_1(\bar{k}) \times P_2(\bar{k})$ où $P_\alpha(\bar{k})$ est la catégorie de Picard définie comme $P(\bar{k})$ mais après avoir remplacé Y' par Y'_α , agit sur $\mathcal{N}(\bar{k})$ par produit tensoriel.

Le point a de $\mathbb{A}_H(k)$ étant choisi comme en (3.1), on sait d'après le lemme 2.8.2, que $\pi_0(P)$ est le k -schéma en groupes constant de valeur le groupe fini $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. On a de plus la suite exacte

$$0 \rightarrow P^0(k) \rightarrow P(k) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rightarrow 0.$$

Remplaçant successivement Y' par Y'_1 et par Y'_2 , on voit que

$$\pi_0(Q)(k) = \pi_0(P_1)(k) \times \pi_0(P_2)(k) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

et que l'on a aussi la suite exacte

$$0 \rightarrow Q^0(k) \rightarrow Q(k) \rightarrow \pi_0(Q)(k) \rightarrow 0.$$

La catégorie quotient $[\mathcal{M}/P](\bar{k})$ a pour objets les $(\mathcal{F}, \iota_{\mathcal{F}}) \in \text{ob } \mathcal{M}(\bar{k})$ et pour flèches de $(\mathcal{F}, \iota_{\mathcal{F}})$ vers un autre objet $(\mathcal{F}', \iota_{\mathcal{F}'})$ de $[\mathcal{M}/P](\bar{k})$, les classes d'isomorphie d'objets $(\mathcal{G}, \iota_{\mathcal{G}})$ de $P(\bar{k})$ tels que $(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{k} \otimes_k Y'}} \mathcal{F}, \iota_{\mathcal{G}} \otimes \iota_{\mathcal{F}})$ soit isomorphe à $(\mathcal{F}', \iota_{\mathcal{F}'})$ dans $\mathcal{M}(\bar{k})$. On a un foncteur de Frobenius naturel

$$\text{Frob}_q : [\mathcal{M}/P](\bar{k}) \rightarrow [\mathcal{M}/P](\bar{k})$$

à l'aide duquel on peut retrouver la catégorie $[\mathcal{M}/P](k)$ comme dans la section (A.3). Comme dans *loc. cit.* on note $[\mathcal{M}/P](k)_\#$ l'ensemble des classes d'isomorphie des objets de $[\mathcal{M}/P](k)$ et on définit une application

$$\text{cl}_{\mathcal{M}} : [\mathcal{M}/P](k)_\# \rightarrow \pi_0(P) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

La catégorie quotient $[\mathcal{N}/Q](\bar{k})$ est le produit de catégories

$$[\mathcal{N}/Q](\bar{k}) = [\mathcal{M}_1/P_1](\bar{k}) \times [\mathcal{M}_2/P_2](\bar{k}).$$

On a un foncteur de Frobenius naturel

$$\text{Frob}_q : [\mathcal{N}/Q](\bar{k}) \rightarrow [\mathcal{N}/Q](\bar{k})$$

produit des foncteurs de Frobenius pour $[\mathcal{M}_1/P_1](\bar{k})$ et $[\mathcal{M}_2/P_2](\bar{k})$, à l'aide duquel on retrouve la catégorie $[\mathcal{N}/Q](k) = [\mathcal{M}_1/P_1](k) \times [\mathcal{M}_2/P_2](k)$. On note $[\mathcal{N}/Q](k)_\# = [\mathcal{M}_1/P_1](k)_\# \times [\mathcal{M}_2/P_2](k)_\#$ l'ensemble des classes d'isomorphie des objets de $[\mathcal{N}/Q](k)$ et on a alors une application

$$\text{cl}_{\mathcal{N}} : [\mathcal{N}/Q](k)_\# \rightarrow \pi_0(Q) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

qui n'est autre que $\text{cl}_{\mathcal{N}} = \text{cl}_{\mathcal{M}_1} \times \text{cl}_{\mathcal{M}_2}$ où $\text{cl}_{\mathcal{M}_\alpha} : [\mathcal{M}_\alpha/P_\alpha](k)_\# \rightarrow \pi_0(P_\alpha) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est définie comme $\text{cl}_{\mathcal{M}}$ mais après avoir remplacé Y' par Y'_α .

LEMME 3.10.3. *Pour chacun des deux caractères endoscopiques κ on a $\kappa \circ \text{cl}_{\mathcal{N}} \equiv 1$.*

Démonstration. Si on a un isomorphisme $\text{Frob}_q^*(\mathcal{F}_\alpha, \iota_{\mathcal{F}_\alpha}) \cong (\mathcal{F}_\alpha, \iota_{\mathcal{F}_\alpha}) \otimes (\mathcal{G}_\alpha, \iota_{\mathcal{G}_\alpha})$ où $(\mathcal{F}_\alpha, \iota_{\mathcal{F}_\alpha}) \in \text{ob } \mathcal{M}_\alpha(\bar{k})$ et $(\mathcal{G}_\alpha, \iota_{\mathcal{G}_\alpha}) \in P_\alpha(\bar{k})$, alors la composante connexe $\lambda_\alpha \in \pi_0(P_\alpha)(\bar{k}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ contenant \mathcal{G}_α est nécessairement nulle.

En effet, d'après le lemme 2.8.3, il existe une application de $\pi_0(\mathcal{M}_\alpha)(\bar{k})$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ équivariante par rapport à l'action évidente de $\pi_0(P_\alpha)(\bar{k})$ sur $\pi_0(\mathcal{M}_\alpha)(\bar{k})$ et à l'action de $\pi_0(P_\alpha)(\bar{k}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur lui-même par translation.

Or $\text{Frob}_k^*(\mathcal{F}_\alpha, \iota_{\mathcal{F}_\alpha})$ et $(\mathcal{F}_\alpha, \iota_{\mathcal{F}_\alpha})$ sont dans la même composante connexe de \mathcal{M}_α , d'où l'assertion. \square

Appliquant alors la proposition A.3.1 on obtient les formules de points fixes suivantes.

PROPOSITION 3.10.4. *On a les égalités*

$$\sum_n (-1)^n \text{Tr}(\text{Frob}_q, H^n(\bar{k} \otimes_k \mathcal{M}, \mathbb{Q}_\ell)_\kappa) = |P^0(k)| \sum_{m \in [\mathcal{M}/P](k)_\#} \frac{\kappa(\text{cl}_{\mathcal{M}}(m))}{|\text{Aut}(m)|}$$

et

$$\sum_n (-1)^n \text{Tr}(\text{Frob}_q, H^n(\bar{k} \otimes_k \mathcal{N}, \mathbb{Q}_\ell)_\kappa) = |Q^0(k)| \sum_{n \in [\mathcal{N}/Q](k)_\#} \frac{1}{|\text{Aut}(n)|}.$$

Remarque. Les champs \mathcal{M} et P sont de Deligne-Mumford et n'importe quel objet sur \bar{k} de l'un de ces champs a pour seuls automorphismes

$$\{\pm 1\} = \bar{k}^{\tau^* = (-)^{-1}} = (H^0(\bar{k} \otimes_k Y', \mathcal{O}_{\bar{k} \otimes_k Y'}^\times))^{\tau^* = (-)^{-1}}.$$

Ces automorphismes sont donc les mêmes pour \mathcal{M} et P . Ils disparaissent donc dans le champ quotient $[\mathcal{M}/P]$ et dans la suite on peut donc les négliger. Le même raisonnement vaut pour l'autre quotient $[\mathcal{N}/Q]$.

Nous allons finalement «localiser» les seconds membres des formules des points fixes ci-dessus. Pour cela nous aurons besoin d'un point base de $\mathcal{M}(k)$ et d'un point base de $\mathcal{N}(k)$.

Commençons par préciser ses points base. À la fin de la section (2.6) nous avons construit une section de Kostant de la fibration de Hitchin au-dessus de \mathbb{A}^{red} . C'est un $\mathcal{O}_{Y'}$ -module inversible racine carrée de $\omega_{Y'/X'}$ muni d'une structure unitaire. Remplaçant successivement Y' par Y'_1 et par Y'_2 nous obtenons donc un objet de Kostant $(\mathcal{K}, \iota_{\mathcal{K}}) = ((\mathcal{K}_1, \iota_{\mathcal{K}_1}), (\mathcal{K}_2, \iota_{\mathcal{K}_2}))$ de $\mathcal{N}(k)$. Par image directe par la normalisation partielle $Y'_1 \amalg Y'_2 \rightarrow Y'$, c'est-à-dire par image par l'immersion fermée $i : \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$, cet objet de Kostant de \mathcal{N} définit un objet qui est différent de l'objet de Kostant de $\mathcal{M}(k)$. Remarquons en particulier que l'image directe de \mathcal{K} est sans torsion de rang 1 sur Y' mais n'est pas inversible comme l'est l'objet de Kostant.

Nous prendrons pour point base de $\mathcal{N}(k)$ l'objet de Kostant $(\mathcal{K}, \iota_{\mathcal{K}})$ et pour point base de $\mathcal{M}(k)$ l'image de cet objet de Kostant de $\mathcal{N}(k)$ par i , objet que nous noterons aussi $(\mathcal{K}, \iota_{\mathcal{K}})$.

Notons au passage que le signe $(-1)^r$ qui apparaît dans l'énoncé du théorème 1.5.1 provient bien du fait que nous avons pris comme point base l'objet de Kostant de \mathcal{N} et non l'objet de Kostant de \mathcal{M} comme dans [Kot 2].

Procédons maintenant à la localisation pour \mathcal{M} . Pour chaque point fermé y de Y , on a un analogue local de la catégorie $[\mathcal{M}/P](\bar{k})$. Soit A_y le complété de l'anneau semi-local de Y' le long de $\pi_Y^{-1}(y)$ et $\text{Frac}(A_y)$ l'anneau total des fractions de A_y . L'involution τ de Y' induit une involution notée encore τ sur A_y .

Pour chaque point fermé y de Y , notons K_y le complété de \mathcal{K} le long de $\pi_Y^{-1}(y)$, de sorte que K_y est un A_y -module sans torsion de rang 1 et que l'on a une structure unitaire $\iota_{K_y} : \tau^* K_y \xrightarrow{\sim} K_y^\vee = \omega_{X/Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} K_y^{-1}$. On en déduit un $\text{Frac}(A_y)$ -module

$$V_y := \text{Frac}(A_y) \otimes_{A_y} K_y$$

de dimension 1 et une structure unitaire

$$\iota_{V_y} : \tau^* V_y \xrightarrow{\sim} V_y^\vee = \text{Hom}_{\text{Frac}(A_y)}(V_y, \text{Frac}(A_y))$$

sur cette droite vectorielle. Ici le produit tensoriel par $\omega_{X/Y,y}$ est inutile puisque $\omega_{X/Y}$ est à support dans le fermé fini de Y où le revêtement fini génériquement étale $Y \rightarrow X$ est ramifié.

Soit \overline{A}_y le complété de la \overline{k} -algèbre semi-locale $\overline{k} \otimes_k A_y$. Pour tout A_y -module M_y on note $\overline{M}_y = \overline{A}_y \otimes_{A_y} M_y$. Considérons l'ensemble de sous- \overline{A}_y -modules de \overline{V}_y

$$\mathcal{M}(y)(\overline{k}) = \{ \mathcal{V}_y \subset \overline{V}_y \mid \text{Frac}(\overline{A}_y)\mathcal{V}_y = \overline{V}_y \text{ et } \iota_{\overline{V}_y}(\tau^*\mathcal{V}_y) = \mathcal{V}_y^\vee \}$$

où $\iota_{\overline{V}_y}$ est induit par ι_{V_y} et où $\mathcal{V}_y^\vee = \omega_{X/Y,y} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{V}_y^{-1}$ et

$$\mathcal{V}_y^{-1} = \{ \nu \in \text{Hom}_{\text{Frac}(\overline{A}_y)}(\overline{V}_y, \text{Frac}(\overline{A}_y)) \mid \nu(\mathcal{V}_y) \subset \overline{K}_y \}.$$

Sur cet ensemble on a l'action par homothéties du groupe

$$P(y)(\overline{k}) = \{ a \in \text{Frac}(\overline{A}_y)^\times / \overline{A}_y^\times \mid \tau(a) = a^{-1} \}.$$

Considérons alors la catégorie quotient $[\mathcal{M}(y)/P(y)](\overline{k})$ de $\mathcal{M}(y)(\overline{k})$ pour cette action de $P(y)(\overline{k})$. Si y est un point lisse de Y , $P(y)(\overline{k})$ agit librement et transitivement sur $\mathcal{M}(y)(\overline{k})$, de sorte que la catégorie $[\mathcal{M}(y)/P(y)](\overline{k})$ n'a qu'un seul objet à isomorphisme près et cet objet n'a pas d'automorphisme non trivial. Le produit de catégories

$$\prod_{y \in Y} [\mathcal{M}(y)/P(y)](\overline{k}) = \prod_{y \in Y^{\text{sing}}} [\mathcal{M}(y)/P(y)](\overline{k})$$

où Y^{sing} est fermé des points singuliers de Y et où les y sont des points fermés, est donc un produit fini.

On construit un foncteur

$$\prod_{y \in Y^{\text{sing}}} \mathcal{M}(y)(\overline{k}) \rightarrow \mathcal{M}(\overline{k})$$

comme suit. À toute collection de réseaux $(\mathcal{V}_y)_y$ on associe le $\mathcal{O}_{\overline{k} \otimes_k Y'}$ -module cohérent sans torsion de rang 1 obtenu en recollant la restriction du module \mathcal{K} à l'ouvert de lissité de $\overline{k} \otimes_k Y'$ et les $\mathcal{V}_y \subset \overline{V}_y$. On munit ce $\mathcal{O}_{\overline{k} \otimes_k Y'}$ -module de la structure unitaire qui est la structure $\iota_{\mathcal{K}}$ sur l'ouvert de lissité de $\overline{k} \otimes_k Y'$ et celle qui est donnée sur chaque \mathcal{V}_y . De manière similaire on a un morphisme de catégories de Picard

$$\prod_{y \in Y^{\text{sing}}} P(y)(\overline{k}) \rightarrow P(\overline{k})$$

qui, à toute collection de scalaires $(a_y)_y$ associe le $\mathcal{O}_{\overline{k} \otimes_k Y'}$ -module inversible obtenu en recollant le module trivial sur l'ouvert de lissité de $\overline{k} \otimes_k Y'$ et les réseaux $a_y \overline{A}_y \subset \text{Frac}(\overline{A}_y)$, ce recollement étant muni de la structure unitaire évidente.

Le morphisme entre les \mathcal{M} est équivariant relativement au morphisme entre les P et induit par passage au quotient un foncteur

$$\prod_{y \in Y^{\text{sing}}} [\mathcal{M}(y)/P(y)](\overline{k}) \rightarrow [\mathcal{M}/P](\overline{k}).$$

LEMME 3.10.5. *Ce foncteur $\prod_{y \in Y^{\text{sing}}} [\mathcal{M}(y)/P(y)](\bar{k}) \rightarrow [\mathcal{M}/P](\bar{k})$ ci-dessus est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que le foncteur est essentiellement surjectif.

Soit $(\mathcal{F}, \iota_{\mathcal{F}})$ un objet de $\mathcal{M}(\bar{k})$. La restriction de \mathcal{F} à l'ouvert de lissité de $\bar{k} \otimes_k Y'$ est inversible. On peut donc trouver un module inversible unitaire sur $\bar{k} \otimes_k Y'$ qui prolonge la restriction de $(\mathcal{F}, \iota_{\mathcal{F}})$ à cet ouvert. En effet, pour avoir un tel prolongement, il suffit de choisir, pour chaque $y \in Y^{\text{sing}}$, un vecteur de base unitaire e_y de la $\text{Frac}(\bar{A}_y)$ -droite vectorielle $\text{Frac}(\bar{A}_y) \otimes_{\bar{A}_y} \mathcal{V}_y$ et de recoller la restriction de $(\mathcal{F}, \iota_{\mathcal{F}})$ à l'ouvert de lissité et les sous- \bar{A}_y -modules inversibles unitaires $\bar{A}_y e_y \subset \text{Frac}(\bar{A}_y) \otimes_{\bar{A}_y} \mathcal{V}_y$.

Par suite, quitte à remplacer notre objet de départ par un objet qui lui est isomorphe dans $[\mathcal{M}/P](\bar{k})$, on peut supposer que $(\mathcal{F}, \iota_{\mathcal{F}})$ et l'objet $(\mathcal{K}, \iota_{\mathcal{K}})$ ont la même restriction à l'ouvert de lissité de $\bar{k} \otimes_k Y'$. La surjectivité est maintenant triviale puisque tout module sur $\bar{k} \otimes_k Y'$ peut s'obtenir par recollement de modules sur l'ouvert de lissité et de \bar{A}_y -modules.

Pour terminer la preuve du lemme, montrons que le foncteur est pleinement fidèle.

Soient $(\mathcal{V}_y)_{y \in Y^{\text{sing}}}$ et $(\mathcal{V}'_y)_{y \in Y^{\text{sing}}}$ deux objets de $\prod_{y \in Y^{\text{sing}}} \mathcal{M}(y)(\bar{k})$, d'images $(\mathcal{F}, \iota_{\mathcal{F}})$ et $(\mathcal{F}', \iota_{\mathcal{F}'})$ par le foncteur de recollement. Il s'agit de voir qu'il revient au même de se donner un élément $(a_y)_{y \in Y^{\text{sing}}} \in P(y)(\bar{k})$ tel que $a_y \mathcal{V}_y = \mathcal{V}'_y$ pour chaque y , ou de se donner un objet $(\mathcal{G}, \iota_{\mathcal{G}})$ de $P(\bar{k})$ et un isomorphisme $(\mathcal{G}, \iota_{\mathcal{G}}) \otimes (\mathcal{F}, \iota_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}', \iota_{\mathcal{F}'})$. Or, par construction les restrictions de $(\mathcal{F}, \iota_{\mathcal{F}})$ et $(\mathcal{F}', \iota_{\mathcal{F}'})$ à l'ouvert de lissité de $\bar{k} \otimes_k Y'$ sont toutes les deux isomorphes à la restriction de l'objet $(\mathcal{K}, \iota_{\mathcal{K}})$, de sorte que la restriction de $(\mathcal{G}, \iota_{\mathcal{G}})$ à cet ouvert de lissité est nécessairement trivialisée. L'objet $(\mathcal{G}, \iota_{\mathcal{G}})$ s'obtient donc de manière unique par recollement de sous- \bar{A}_y -modules inversibles unitaires $\bar{A}_y a_y \subset \text{Frac}(\bar{A}_y)$ □

Pour chaque $y \in Y^{\text{sing}}$ on a un foncteur de Frobenius naturel

$$\text{Frob}_q = [\mathcal{M}(y)/P(y)](\bar{k}) \rightarrow [\mathcal{M}(y)/P(y)](\bar{k})$$

à l'aide duquel on peut définir une catégorie $[\mathcal{M}(y)/P(y)](k)$ comme dans la section (A.3). Soit $[\mathcal{M}(y)/P(y)](k)_{\sharp}$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de cette dernière catégorie.

Pour chaque $y \in Y$, on a un plongement

$$[\mathcal{M}(y)/P(y)](k)_{\sharp} \hookrightarrow \prod_{y' \in Y^{\text{sing}}} [\mathcal{M}(y')/P(y')](k)_{\sharp}$$

dont la composante en y est l'identité et la composante en n'importe quel $y' \neq y$ est constante de valeur la section $K_{y'} \subset V_{y'}$. On note

$$\text{cl}_{\mathcal{M}(y)} : [\mathcal{M}(y)/P(y)](k)_{\sharp} \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

la restriction de l'application $\text{cl}_{\mathcal{M}}$ via ce plongement. L'application composée

$$\prod_{y \in Y^{\text{sing}}} [\mathcal{M}(y)/P(y)](k)_{\sharp} \xrightarrow{\sim} [\mathcal{M}/P](k)_{\sharp} \xrightarrow{\text{cl}_{\mathcal{M}}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

est alors la somme des applications $\text{cl}_{\mathcal{M}(y)}$ pour $y \in Y^{\text{sing}}$.

On a donc

(**) $_{\mathcal{M}}$

$$\sum_{m \in [\mathcal{M}/P](k)_{\sharp}} \frac{\kappa(\text{cl}_{\mathcal{M}}(m))}{|\text{Aut}(m)|} = \prod_{y \in Y^{\text{sing}}} \left(\sum_{m_y \in [\mathcal{M}(y)/P(y)](k)_{\sharp}} \frac{\kappa(\text{cl}_{\mathcal{M}(y)}(m_y))}{|\text{Aut}(m_y)|} \right).$$

En remplaçant successivement Y' par Y'_1 et par Y'_2 dans les définitions et énoncés ci-dessus et en faisant le produit des résultats obtenus, on obtient une équivalence de catégories

$$\prod_{y \in Y^{\text{sing}}} [\mathcal{N}(y)/Q(y)](k)_{\sharp} \xrightarrow{\sim} [\mathcal{N}/Q](k)_{\sharp},$$

et donc l'égalité

(**) $_{\mathcal{N}}$
$$\sum_{n \in [\mathcal{N}/Q](k)_{\sharp}} \frac{1}{|\text{Aut}(n)|} = \prod_{y \in Y^{\text{sing}}} \left(\sum_{n_y \in [\mathcal{N}(y)/Q(y)](k)_{\sharp}} \frac{1}{|\text{Aut}(n_y)|} \right).$$

Notons Z^{inerte} l'ensemble des points fermés de $Z = Y_1 \cap Y_2$ qui sont inertes dans le revêtement double étale $Z' \rightarrow Z$. Pour chaque $z \in Z^{\text{inerte}}$ notons r_z la longueur de la $\kappa(z)$ -algèbre artinienne $\mathcal{O}_{Z,z}$ (anneau local de Z en z).

Pour chaque point fermé y de Y^{sing} notons \tilde{A}_y le normalisé de l'anneau local A_y de Y' en y et $\tilde{A}_{\alpha,y}$ celui de l'anneau local $A_{\alpha,y}$ de Y'_{α} en y pour $\alpha = 1, 2$. On a

$$A_y \subset A_{1,y} \times A_{2,y} \subset \tilde{A}_{1,y} \times \tilde{A}_{2,y} = \tilde{A}_y.$$

Notre théorème global est alors le suivant.

THÉORÈME 3.10.6. *Pour chacun des deux caractères endoscopiques $\kappa : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rightarrow \{\pm 1\}$ on a l'égalité*

$$\begin{aligned} & \prod_{z \in Z^{\text{inerte}}} \left| \frac{(\tilde{A}_z^{\times})^{\tau^* = (-)^{-1}}}{(A_z^{\times})^{\tau^* = (-)^{-1}}} \right| \left(\sum_{m_z \in [\mathcal{M}(z)/P(z)](k)_{\sharp}} \frac{\kappa(\text{cl}_{\mathcal{M}(z)}(m_z))}{|\text{Aut}(m_z)|} \right) \\ &= \prod_{z \in Z^{\text{inerte}}} (-|\kappa(z)|)^{r_z} \left| \frac{(\tilde{A}_z^{\times})^{\tau^* = (-)^{-1}}}{(A_{1,z}^{\times} \times A_{2,z}^{\times})^{\tau^* = (-)^{-1}}} \right| \left(\sum_{n_z \in [\mathcal{N}(z)/Q(z)](k)_{\sharp}} \frac{1}{|\text{Aut}(n_z)|} \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Commençons par trois remarques.

1) Comme on a la suite exacte de catégories de Picard

$$1 \rightarrow \prod_y \frac{(A_{1,y}^\times \times A_{2,y}^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}}{(A_y^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}} \rightarrow P^0(k) \rightarrow Q^0(k) \rightarrow 0,$$

on a l'égalité

$$\frac{|Q^0(k)|}{|P^0(k)|} = \prod_y \left| \frac{(A_{1,y}^\times \times A_{2,y}^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}}{(A_y^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}} \right|.$$

On peut écrire chaque facteur du second membre de l'égalité ci-dessus sous la forme

$$\left| \frac{(A_{1,y}^\times \times A_{2,y}^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}}{(A_y^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}} \right| = \left| \frac{(\tilde{A}_y^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}}{(A_y^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}} \right| \left| \frac{(\tilde{A}_y^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}}{(A_{1,y}^\times \times A_{2,y}^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}} \right|^{-1}.$$

2) L'entier $m_{Z'/Z/S}$ dans la proposition 3.10.2 est par définition (cf. la section (3.4)) égal à

$$m_{Z'/Z/S} = \sum_{z \in Z^{\text{inerte}}} r_z.$$

3) L'entier r_z a un sens pour tout point fermé z de Z et on a évidemment

$$r = \sum_{z \in Z} r_z.$$

Compte tenu de ces remarques, des deux dernières propositions et des formules $(**)_{\mathcal{M}}$ et $(**)_{\mathcal{N}}$, il ne reste plus qu'à vérifier que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\tilde{A}_y^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}}{(A_y^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}} \right| \left(\sum_{m_y \in [\mathcal{M}(y)/P(y)](k)_\#} \frac{\kappa(\text{cl}_{\mathcal{M}(y)}(m_y))}{|\text{Aut}(m_y)|} \right) \\ &= |\kappa(y)|^{r_y} \left| \frac{(\tilde{A}_y^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}}{(A_{1,y}^\times \times A_{2,y}^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}} \right| \left(\sum_{n_y \in [\mathcal{N}(y)/Q(y)](k)_\#} \frac{1}{|\text{Aut}(n_y)|} \right) \end{aligned}$$

quel que soit $y \in Y^{\text{sing}} - Z^{\text{inerte}}$, pour achever la preuve du théorème.

Si y n'est pas dans Z , cette égalité est tautologique puisqu'on a $A_y = A_{\alpha,y}$ pour l'unique $\alpha \in \{1, 2\}$ tel que $y \in Y_\alpha$.

Supposons donc que $y \in Z - Z^{\text{inerte}}$. Notons B_y le complété de l'anneau local de Y . On a $A_y = B_y \times B_y$, l'involution τ échangeant les deux copies de B_y . De façon compatible on a $K_y = L_y \oplus (\omega_{Y/X,y} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} L_y^{\otimes -1})$ où L_y est un B_y -module sans torsion de rang 1. Posons $W_y = \text{Frac}(B_y) \otimes_{B_y} L_y$. Notons \overline{B}_y le complété de $\bar{k} \otimes_k B_y$ et $\overline{(-)}$ le foncteur $\overline{B}_y \otimes_{B_y} (-)$.

Avec ces notations, la catégorie $\mathcal{M}(y)(\bar{k})$ est équivalente à la catégorie des sous- B_y -modules $\mathcal{W}_y \subset \overline{W}_y$ tels que $\text{Frac}(\overline{B}_y)\mathcal{W}_y = \overline{W}_y$. Le groupe $P(y)(\bar{k})$ est

isomorphe à $\text{Frac}(\overline{B}_y)^\times / \overline{B}_y^\times$ et agit sur les \mathcal{W}_y par homothéties. Par conséquent la catégorie $[\mathcal{M}(y)/P(y)](k)$ est équivalente à la catégorie des couples $(\mathcal{W}_y, b) \in \text{ob } \mathcal{M}(\overline{k}) \times P(y)(\overline{k})$ tels que

$$\text{Frob}_q \mathcal{W}_y = b\mathcal{W}_y \subset \overline{W}_y.$$

Un tel b est automatiquement dans la «composante neutre»

$$\widetilde{B}_y^\times / \overline{B}_y^\times \subset \text{Frac}(\overline{B}_y)^\times / \overline{B}_y^\times$$

où \widetilde{B}_y est le normalisé de B_y dans $\text{Frac}(B_y)$. On a donc d'une part $\kappa(\text{cl}_{\mathcal{M}(y)}(\mathcal{W}_y, b)) = 1$ et d'autre part

$$\text{Frob}_q(c^{-1}\mathcal{W}_y) = c^{-1}\mathcal{W}_y$$

où $c \in \widetilde{B}_y^\times / \overline{B}_y^\times$ est n'importe quelle solution de l'équation $\text{Frob}_q(c)c^{-1} = b$. On en déduit que $[\mathcal{M}(y)/P(y)](k)_\natural$ est l'ensemble des classes de sous- B_y -modules $\mathcal{W}_y \subset W_y$ tels que $\text{Frac}(B_y)\mathcal{W}_y = W_y$, modulo l'action par homothéties de $\text{Frac}(B_y)^\times / \overline{B}_y^\times$ et que

$$\text{Aut}(\mathcal{W}_y) = \{b \in \text{Frac}(B_y)^\times \mid b\mathcal{W}_y = \mathcal{W}_y\} / \overline{B}_y^\times.$$

De même, notons $B_{\alpha,y}$ le complété de l'anneau local de Y_α en y . On a $A_{\alpha,y} = B_{\alpha,y} \times B_{\alpha,y}$, l'involution τ échangeant les deux copies de $B_{\alpha,y}$. De façon compatible, le complété de \mathcal{K}_α le long de $\pi_{Y_\alpha}^{-1}(y)$ se décompose en $K_{\alpha,y} = L_{\alpha,y} \oplus (\omega_{Y_\alpha/X,y} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_\alpha,y}} L_{\alpha,y}^{\otimes -1})$ où $L_{\alpha,y}$ est maintenant un $B_{\alpha,y}$ -module inversible. Notons $W_{\alpha,y} = \text{Frac}(B_{\alpha,y}) \otimes_{B_{\alpha,y}} L_{\alpha,y}$.

En remplaçant successivement Y par Y_1 et par Y_2 , on voit d'une part que l'ensemble $[\mathcal{N}(y)/Q(y)](k)_\natural$ est isomorphe à l'ensemble des classes de couples $(\mathcal{W}_{1,y}, \mathcal{W}_{2,y})$ où $\mathcal{W}_{\alpha,y} \subset W_{\alpha,y}$ est un sous- $B_{\alpha,y}$ -module tel que $\text{Frac}(B_{\alpha,y})\mathcal{W}_{\alpha,y} = W_{\alpha,y}$, modulo l'action par homothéties de

$$(\text{Frac}(B_{1,y})^\times / B_{1,y}^\times) \times (\text{Frac}(B_{2,y})^\times / B_{2,y}^\times),$$

et d'autre part que

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathcal{W}_{1,y}, \mathcal{W}_{2,y}) &= \{(b_1 \in \text{Frac}(B_{1,y})^\times \mid b_1\mathcal{W}_{1,y} = \mathcal{W}_{1,y}) / B_{1,y}^\times \\ &\quad \times \{(b_2 \in \text{Frac}(B_{2,y})^\times \mid b_2\mathcal{W}_{2,y} = \mathcal{W}_{2,y}) / B_{2,y}^\times\}. \end{aligned}$$

Comme

$$\text{Frac}(B_y)^\times = \text{Frac}(B_{1,y})^\times \times \text{Frac}(B_{2,y})^\times,$$

les $\text{Frac}(B_y)^\times$ -modules W_y et $W_{1,y} \oplus W_{2,y}$ sont canoniquement isomorphes. On a la projection «non algébrique» introduite dans la section 5 de [Ka-Lu] (voir aussi la section 6 de [La-Ra])

$$\mathcal{W}_y \mapsto (\mathcal{W}_{1,y} = \mathcal{W}_y \cap W_{1,y}, \mathcal{W}_{2,y} = \text{pr}_{W_{2,y}}(\mathcal{W}_y))$$

dont on sait (cf. *loc. cit.*) que toutes ses fibres ont $|\kappa(y)|^{r_z}$ éléments. Cette projection est équivariante pour les actions de $\text{Frac}(B_y)^\times/B_y^\times$ sur la source et de $\text{Frac}(B_y)^\times/(B_{1,y}^\times \times B_{2,y}^\times)$ sur le but compte tenu de l'épimorphisme

$$\text{Frac}(B_y)^\times/B_y^\times \rightarrow \text{Frac}(B_y)^\times/(B_{1,y}^\times \times B_{2,y}^\times)$$

qui est induit par l'inclusion $B_y^\times \subset B_{1,y}^\times \times B_{2,y}^\times$.

La relation que l'on cherche à vérifier se réécrit

$$\sum_{\mathcal{W}_y \in} \frac{1}{|\text{Aut}(\mathcal{W}_y)|} = |\kappa(y)|^{r_y} \left| \left(\frac{B_y^\times}{B_{1,y}^\times \times B_{2,y}^\times} \right) \right| \left(\sum_{(\mathcal{W}_{1,y}, \mathcal{W}_{2,y})} \frac{1}{|\text{Aut}(\mathcal{W}_{1,y}, \mathcal{W}_{2,y})|} \right)$$

et se démontre maintenant par un simple comptage. □

Remarque. La formule pour $y \in Z - Z^{\text{inerte}}$ ci-dessus est en fait un cas particulier de la descente d'Harish-Chandra pour les intégrales orbitales et la démonstration que nous en avons donnée est une simple reformulation de l'argument usuel.

4. Le passage du local au global

4.1. *Retour à la situation locale.* Rappelons les données locales du chapitre 1.

On s'est donné un corps local nonarchimédien F d'anneau des entiers \mathcal{O}_F , de corps résiduel $k = \mathbb{F}_q$ et on a choisi une uniformisante ϖ_F de F . On s'est donné une extension quadratique non ramifiée F' de F de corps résiduel $k' = \mathbb{F}_{q^2}$, et on a noté τ l'élément non trivial de $\text{Gal}(F'/F)$.

On s'est aussi donné une famille finie $(E_i)_{i \in I}$ d'extensions finies séparables E_i de degré n_i de F , toutes disjointes de F' . On a noté $E'_i = E_i F'$ pour $i \in I$ et encore par τ l'élément non trivial de $\text{Gal}(E'_i/E_i)$.

On s'est donné enfin pour chaque $i \in I$ un élément $\gamma_i \in \mathcal{O}_{E'_i}$ hermitien, c'est-à-dire tel que $\gamma_i^\tau + \gamma_i = 0$. On a supposé que γ_i engendre E'_i .

Le polynôme minimal $P_i(T)$ de γ_i sur F' est un polynôme irréductible dans $F'[T]$. On a supposé que les deux polynômes $P_i(T)$ sont deux à deux premiers entre eux.

Puisque les γ_i sont entiers, les polynômes $P_i(T)$ sont à coefficients dans $\mathcal{O}_{F'}$. L'hypothèse γ_i hermitien implique que $P_i^\tau(T) = (-1)^{n_i} P_i(-T)$.

Pour tout partie J de I on a posé $E_J = \bigoplus_{i \in J} E_i$, $P_J(T) = \prod_{i \in J} P_i(T)$, etc.

4.2. *Un lemme d'approximation.* Rappelons quelques faits bien connus (voir les exercices, §2, ch. II, de [Ser]).

Le discriminant $\text{Disc}(P) \in F'$ d'un polynôme unitaire $P(T) \in F'[T]$ est le résultant des polynômes $P(T)$ et $\frac{dP}{dT}(T)$. C'est un polynôme universel

(à coefficients entiers) en les coefficients de $P(T)$; il est donc dans $\mathcal{O}_{F'}$ si $P(T) \in \mathcal{O}_{F'}[T]$. Le discriminant de $P(T)$ est non nul si et seulement si $P(T)$ est séparable.

LEMME 4.2.1. *Soit J une partie de I et $\tilde{P}(T)$ un polynôme unitaire de degré n_J à coefficients dans $\mathcal{O}_{F'}$. Alors, pour tout entier $m_J > n_J v_{F'}(\text{Disc}(P))$, la condition*

$$P_J(T) - \tilde{P}(T) \in \varpi_{F'}^{m_J} \mathcal{O}_{F'}[T]$$

implique que

- $\tilde{P}(T)$ est séparable sur F' et pour chaque $i \in J$, $\tilde{P}(T)$ admet une unique racine $\tilde{\gamma}_i$ dans E'_i telle que

$$v_{E'_i}(\gamma_i - \tilde{\gamma}_i) \geq e_i \frac{m_J}{n_J}$$

où on rappelle que e_i est l'indice de ramification de E'_i sur F' ; de plus, si on note $\tilde{P}_i(T)$ le polynôme minimal de $\tilde{\gamma}_i$ dans $F'[T]$, on a $\tilde{P}(T) = \prod_{i \in J} \tilde{P}_i(T)$;

- pour chaque $i \in J$, on a

$$P_i(T) - \tilde{P}_i(T) \in \varpi_{F'}^{n_i \frac{m_J}{n_J}} \mathcal{O}_{F'}[T]$$

et les éléments $\frac{dP_i}{dT}(\gamma_i) P_{J-\{i\}}(\gamma_i)$ et $\frac{d\tilde{P}_i}{dT}(\tilde{\gamma}_i) \tilde{P}_{J-\{i\}}(\tilde{\gamma}_i)$ ont même valuation dans E'_i ;

- pour chaque partie K de J , on a $\mathcal{O}_{F'}[\gamma_K] = \mathcal{O}_{F'}[\tilde{\gamma}_K] \subset E'_K$ où bien entendu on a posé $\tilde{\gamma}_K = \bigoplus_{i \in K} \tilde{\gamma}_i \in E'_K$.

Démonstration. Soient $\overline{F'}$ une clôture séparable de F' et $\gamma_{i,1}, \gamma_{i,2}, \dots, \gamma_{i,n_i}$ les racines de $P_i(T)$ dans $\overline{F'}$. On note encore $v_{F'} : \overline{F'}^\times \rightarrow \mathbb{Q}$ l'unique valuation qui prolonge la valuation discrète $v_{F'} : F'^\times \rightarrow \mathbb{Z}$. On rappelle que $v_{F'} \circ \sigma = v_{F'}$ pour tout élément $\sigma \in \text{Gal}(\overline{F'}/F')$ du groupe de Galois de $\overline{F'}$ sur F' et que $v_{E'_i} = e_i(v_{F'} \circ \sigma)|_{E'_i}$ pour tout F' -plongement $\sigma : E'_i \hookrightarrow \overline{F'}$.

Montrons dans un premier temps que \tilde{P} est séparable sur F' . On a

$$v_{F'}(\text{Disc}(P_J) - \text{Disc}(\tilde{P})) \geq m_J \geq \frac{m_J}{n_J} > v_{F'}(\text{Disc}(P_J))$$

par hypothèse. Par suite, $\text{Disc}(\tilde{P})$ est non nul, et en fait de même valuation que $\text{Disc}(P_J)$.

On notera $(\tilde{P}_{\tilde{i}})_{\tilde{i} \in \tilde{J}}$ l'ensemble des facteurs irréductibles (unitaires) de \tilde{P} et pour chaque $\tilde{i} \in \tilde{J}$, $\tilde{\gamma}_{\tilde{i},1}, \dots, \tilde{\gamma}_{\tilde{i},\tilde{n}_{\tilde{i}}}$ les racines de $\tilde{P}_{\tilde{i}}$ dans $\overline{F'}$.

Comme

$$v_{F'}(\text{Disc}(P_J)) = \sum_{(i,j) \neq (i',j')} v_{F'}(\gamma_{i,j} - \gamma_{i',j'})$$

on a

$$v_{F'}(\gamma_{i,j} - \gamma_{i',j'}) < \frac{m_J}{n_J}$$

quels que soient $i, i' \in J$, $j \in \{1, \dots, n_i\}$ et $j' \in \{1, \dots, n_{i'}\}$ tels que $(i, j) \neq (i', j')$. En d'autres termes, la «distance»

$$|\gamma_{i,j} - \gamma_{i',j'}|_{F'} = q^{-v_{F'}(\gamma_{i,j} - \gamma_{i',j'})}$$

entre deux racines distinctes de $P_J(T)$ est strictement plus grande que $q^{-\frac{m_J}{n_J}}$. De même, on a

$$|\tilde{\gamma}_{\tilde{i},\tilde{j}} - \tilde{\gamma}_{\tilde{i}',\tilde{j}'}|_{F'} > q^{-\frac{m_J}{n_J}}$$

quels que soient $(\tilde{i}, \tilde{j}) \neq (\tilde{i}', \tilde{j}')$.

Maintenant, soit $\tilde{\gamma}$ une racine de $\tilde{P}(T)$ dans \overline{F}' . On a

$$\sum_{i \in J} \sum_{j=1}^{n_i} v_{F'}(\tilde{\gamma} - \gamma_{i,j}) = v_{F'}(P_J(\tilde{\gamma})) = v_{F'}(P_J(\tilde{\gamma}) - \tilde{P}(\tilde{\gamma})) \geq m_J.$$

Il existe donc $i \in J$ et $j \in \{1, \dots, n_i\}$ tel que $v_{F'}(\tilde{\gamma} - \gamma_{i,j}) \geq \frac{m_J}{n_J}$, i.e.

$$|\tilde{\gamma} - \gamma_{i,j}|_{F'} \leq q^{-\frac{m_J}{n_J}},$$

et le couple (i, j) est unique puisque la distance entre deux $\gamma_{i,j}$ distincts est $> q^{-\frac{m_J}{n_J}}$.

On construit ainsi une application $\tilde{\gamma} \mapsto \gamma(\tilde{\gamma})$ de l'ensemble des racines de $\tilde{P}(T)$ dans \overline{F}' dans l'ensemble des racines de $P_J(T)$ dans \overline{F}' qui est caractérisée par la relation

$$|\tilde{\gamma} - \gamma(\tilde{\gamma})|_{F'} \leq q^{-\frac{m_J}{n_J}}$$

et qui est $\text{Gal}(\overline{F}'/F')$ -équivariante puisque la distance est $\text{Gal}(\overline{F}'/F')$ -invariante. Cette application est nécessairement injective puisque la distance entre deux racines distinctes de $\tilde{P}(T)$ est aussi $> q^{-\frac{m_J}{n_J}}$. Elle est donc bijective puisque $P_J(T)$ et $\tilde{P}(T)$ sont tous les deux séparables de degré n_J . On en déduit une bijection $\tilde{i} \rightarrow i(\tilde{i})$ de \tilde{J} sur J telle que $\tilde{n}_{i(\tilde{i})} = n_i$ et pour chaque \tilde{i} une permutation $\tilde{j} \rightarrow j(\tilde{j})$ de $\{1, \dots, n_{i(\tilde{i})}\}$ telle que

$$\gamma(\tilde{\gamma}_{\tilde{i},\tilde{j}}) = \gamma_{i(\tilde{i}),j(\tilde{j})}$$

pour tout $\tilde{i} \in \tilde{J}$ et tout $\tilde{j} \in \{1, \dots, n_{i(\tilde{i})}\}$. Quitte à changer l'indexation des facteurs de \tilde{P} et la numérotation des racines des $\tilde{P}_{\tilde{i}}$, on peut supposer et on supposera dans la suite que $\tilde{J} = J$ et que les bijections $\tilde{i} \mapsto i(\tilde{i})$ et $\tilde{j} \mapsto j(\tilde{j})$ sont les applications identiques.

La minimalité de la distance entre $\tilde{\gamma}$ et $\gamma(\tilde{\gamma})$ assure de plus qu'il ne peut pas exister d'élément de \overline{F}' qui soit conjugué à $\gamma(\tilde{\gamma})$ sur $F'[\tilde{\gamma}]$ autre que $\gamma(\tilde{\gamma})$ lui-même, de sorte que $\gamma(\tilde{\gamma}) \in F'[\tilde{\gamma}]$ puisque $F'[\tilde{\gamma}]$ est séparable sur F' . Par suite, on a même $F'[\gamma_{i,j}] = F'[\tilde{\gamma}_{i,j}]$ quels que soient $i \in J$ et $j \in \{1, \dots, n_i\}$.

Les deux F' -algèbres $F'[T]/(\tilde{P}(T))$ et E'_J sont donc F' -isomorphes. Plus précisément on a l'isomorphisme

$$\begin{aligned} E'_J &= \bigoplus_{i \in J} F'[\gamma_i] \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in J} F'[\gamma_{i,1}] = \bigoplus_{i \in J} F'[\tilde{\gamma}_{i,1}] \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in J} F'[T]/(\tilde{P}_i(T)) \\ &= F'[T]/(\tilde{P}(T)) \end{aligned}$$

où γ_i est envoyé sur $\gamma_{i,1}$ par le premier isomorphisme et $\tilde{\gamma}_{i,1}$ est envoyé sur la classe de T modulo $\tilde{P}_i(T)$ par le second.

Notons $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_i)_{i \in J} \in E'_J$ l'image inverse de la classe de T modulo \tilde{P} par l'isomorphisme ci-dessus. Bien sûr, pour chaque $i \in J$, l'élément $\tilde{\gamma}_i \in E'_i$ est entier sur $\mathcal{O}_{F'}$. De plus, la valuation $v_{E'_i}(\tilde{\gamma}_i - \gamma_i)$ est $\geq e_i \frac{m_J}{n_J}$.

On a

$$v_{F'}(\text{Discr}(P_J)) = \sum_{i \in J} v_{F'}(\text{Discr}(P_i)) + \sum_{i \neq i' \in J} v_{F'}(\text{Res}(P_i, P_{i'}))$$

avec $v_{F'}(\text{Discr}(P_i)) = n_i \frac{v_{E'_i}(\frac{dP_i}{dT}(\gamma_i))}{e_i} = 2\delta_i + n_i - \frac{n_i}{e_i}$ et $v_{F'}(\text{Res}(P_i, P_{i'})) = r_{i,i'}$, de sorte que

$$\frac{m_J}{n_J} \geq v_{F'}(\text{Discr}(P_J)) = \sum_{i \in J} \left(\frac{n_i a_i}{e_i} + n_i - \frac{n_i}{e_i} \right) \geq \frac{a_i}{e_i}$$

où on rappelle que l'on a posé $a_i = \frac{(2\delta_i + \sum_{i' \neq i} r_{i,i'})e_i}{n_i}$.

Comme $\mathfrak{a}_J = \varpi_{E'_J}^{a_J} \mathcal{O}_{E'_J} \subset \mathcal{O}_{F'}[\gamma_J] \subset \mathcal{O}_{E'_J}$ avec $\underline{a}_J = (a_i)_{i \in J}$, la condition

$$\tilde{\gamma}_i - \gamma_i \in \varpi_{E'_i}^{e_i \frac{m_J}{n_J}} \mathcal{O}_{E'_i} \subset \varpi_{E'_i}^{a_i} \mathcal{O}_{E'_i}$$

quel que soit $i \in J$, implique que $\mathcal{O}_{F'}[\tilde{\gamma}_J] \subset \mathcal{O}_{F'}[\gamma_J]$.

Puisque les deux polynômes $P(T)$ et $\tilde{P}(T)$ jouent des rôles parfaitement symétriques, on a aussi l'inclusion dans le sens inverse, d'où l'égalité désirée $\mathcal{O}_{F'}[\tilde{\gamma}_J] = \mathcal{O}_{F'}[\gamma_J]$. □

Une conséquence de ce lemme est que les intégrales orbitales qui figurent dans le lemme fondamental, dont on a vu qu'elles comptent des idéaux fractionnaires dans les \mathcal{O}_F -algèbres $\mathcal{O}_{F'}[T]/(P_J(T))$, ne dépendent que de la réduction des $P_i(T)$ modulo une puissance assez grande de ϖ_F .

4.3. Variantes du lemme d'approximation. Il est commode de choisir un élément $\zeta \in k'^{\times}$ tel que $\zeta^\tau + \zeta = 0$. Grâce à ce choix, les polynômes $P_i(T)$ peuvent être écrits sous la forme $P_i(T) = Q_i(\zeta T)$ où $Q_i(T) \in \mathcal{O}_F[T]$. Pour toute partie J de I posons $Q_J(T) = \prod_{i \in J} Q_i(T)$; on a alors $E_J = F[T]/Q_J(T)$.

La donnée de γ_i comme ci-dessus est équivalente à la donnée d'un \mathcal{O}_F -sous-schéma fini plat

$$Y_{i, \mathcal{O}_F} = \text{Spec}(\mathcal{O}_F[T]/Q_i(T))$$

de la droite affine $\mathbb{A}_{\mathcal{O}_F}^1 = \text{Spec}(\mathcal{O}_F[T])$ au-dessus de \mathcal{O}_F . L'anneau $\mathcal{O}_F[T]/Q_i(T)$ est un anneau local intègre complet, qui est géométriquement unibranche. Plus précisément, $Y_{i,\mathcal{O}_F} \otimes_k \bar{k}$ peut ne pas être connexe, mais chacune de ses composantes connexes est unibranche.

Pour toute partie J de I notons $Y_{J,\mathcal{O}_F} = \text{Spec}(\mathcal{O}_F[T]/Q_J(T))$ le diviseur de Cartier de $\mathbb{A}_{\mathcal{O}_F}^1$ qui est la somme des Y_{i,\mathcal{O}_F} pour $i \in J$.

Pour tout entier $m \geq 0$, notons $\mathcal{O}_{F,m}$ la k -algèbre finie $\mathcal{O}_{F,m} = \mathcal{O}_F/\varpi_F^m \mathcal{O}_F$ et notons $(-)\mathcal{O}_{F,m}$ la réduction modulo ϖ_F^m de $(-)\mathcal{O}_F$. Le lemme d'approximation de la section précédente peut se reformuler comme suit.

LEMME 4.3.1. *Soit J une partie de I . Il existe un entier $m_J \geq 0$ ayant la propriété suivante: tout sous- \mathcal{O}_F -schéma fini et plat $\tilde{Y}_{\mathcal{O}_F} = \mathcal{O}_F[T]/\tilde{Q}(T)$ de $\mathbb{A}_{\mathcal{O}_F}^1$ tel que*

$$\tilde{Y}_{\mathcal{O}_{F,m_J}} = Y_{J,\mathcal{O}_{F,m_J}}$$

en tant que sous-schéma fermé de $\text{Spec}(\mathcal{O}_{F,m_J}[T])$, est isomorphe à Y_{J,\mathcal{O}_F} en tant que \mathcal{O}_F -schéma non plongé.

Notons $\overline{Q}_J(T)$ la réduction modulo ϖ_F de $Q_J(T)$. Pour tout entier $m \geq 0$, on peut voir $\overline{Q}_J[T]$ comme un élément de $\mathcal{O}_F[T]$ et de $\mathcal{O}_{F,m}[T]$ via les plongements évidents $k[T] \subset \mathcal{O}_F[T]$ et $k[T] \subset \mathcal{O}_{F,m}[T]$. Le schéma $Y_{J,\mathcal{O}_{F,m}}$ est un schéma de longueur mn_J supporté par les zéros de $\overline{Q}_J[T]$ dans la fibre spéciale \mathbb{A}_k^1 de $\mathbb{A}_{\mathcal{O}_F}^1$, de sorte que $Y_{\mathcal{O}_{F,m}}$ est nécessairement contenu dans le schéma fini $Z_{J,m} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{F,m}[T]/(\overline{Q}(T)^{mn_J}))$ qui ne dépend que de $\overline{Q}_J(T)$.

LEMME 4.3.2. *Soient J une partie de I et $\tilde{Q}(T) \in \mathcal{O}_F[T]$ un polynôme unitaire de degré n_J ayant aussi pour réduction $\overline{Q}_J(T) \in k[T]$ modulo l'uniformisante ϖ_F . Notons $\tilde{Y}_{\mathcal{O}_F} = \text{Spec}(\mathcal{O}_F[T]/\tilde{Q}(T))$. Soit m_J un entier comme dans le lemme ci-dessus. Supposons que*

$$Y_{J,\mathcal{O}_F} \cap Z_{J,m_J} = \tilde{Y}_{\mathcal{O}_F} \cap Z_{J,m_J}.$$

Alors $\tilde{Y}_{\mathcal{O}_F}$ est isomorphe à Y_{J,\mathcal{O}_F} en tant que \mathcal{O}_F -schéma non plongé.

Démonstration. Comme on a vu plus haut, $Y_{J,\mathcal{O}_F} \cap Z_{J,m_J} = Y_{\mathcal{O}_F} \cap \mathbb{A}_{\mathcal{O}_{F,m_J}}^1$. De même, on voit que $\tilde{Y}_{\mathcal{O}_F} \cap Z_{J,m_J} = \tilde{Y}_{\mathcal{O}_F} \cap \mathbb{A}_{\mathcal{O}_{F,m_J}}^1$. Ainsi, le lemme est une conséquence du lemme précédent. \square

Puisque toutes les intégrales orbitales que l'on considère ne dépendent que des classes d'isomorphisme des Y_{J,\mathcal{O}_F} , ces intégrales ne changent pas si on remplace les polynômes $Q_J(T)$ par des polynômes proches $\tilde{Q}(T)$ où la propriété d'être proche signifie que l'hypothèse du lemme est satisfaite.

4.4. *Théorème de Bertini-Poonen.* Une variante du théorème de Bertini, valable sur les corps finis, a été démontré par Poonen ([Poo]). Nous allons rappeler précisément son énoncé.

THÉORÈME 4.4.1. *Soit S un sous-schéma localement fermé d'un espace projectif standard de dimension finie \mathbb{P} sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$. Soit Z un fermé fini de \mathbb{P} tel que $S - (S \cap Z)$ est lisse de dimension d . Soit $z \in H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$. Alors, pour tout entier N assez grand il existe un polynôme homogène $f \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(N))$ de degré N à coefficients dans k , tel que l'hypersurface H_f définie par f vérifie:*

- $H_f \cap S$ est lisse de dimension $d - 1$ en dehors de $Z \cap S$,
- $H_f \cap Z$ est le sous-schéma fermé de Z , défini par l'équation $z = 0$.

En fait, Poonen a démontré un énoncé plus précis: il a calculé la densité des f vérifiant ces propriétés lorsque N tend vers l'infini, et cette densité est un nombre strictement positif. Pour notre besoin, seule existence de f suffit.

L'argument de Poonen se généralise sans difficultés au cas d'une famille finie de sous-schémas localement fermés $(V_i)_{i \in I}$ de \mathbb{P} .

4.5. *Tracer des courbes sur la surface réglée.* Soient X une courbe propre, lisse et géométriquement connexe sur $k = \mathbb{F}_q$ et $X' \rightarrow X$ un revêtement double étale qui est aussi géométriquement connexe. Soient $x_0, x_\infty \in X(k)$ tels que x_0 est inerte et x_∞ est décomposé dans le revêtement $X' \rightarrow X$. On identifie le corps local F avec le complété du corps des fonctions de X en la place x_0 et on identifie F' à l'extension non ramifiée de F définie par $X' \rightarrow X$.

On se donne un diviseur D de degré $\geq g + 1$ sur X qui évite x_0 . Avec les notations du chapitre 2, on a le fibré en droites projectives $\Sigma = \mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus (\mathcal{L}_D)^{\otimes -1}) \rightarrow X$ qui complète le fibré en droites vectorielles $\Sigma^\circ = \mathbb{V}((\mathcal{L}_D)^{\otimes -1}) \rightarrow X$ dont les sections sont celles de \mathcal{L}_D .

L'hypothèse $\text{deg}(D) \geq g + 1$ implique que $\mathcal{O}_\Sigma(1) \otimes p^* \mathcal{L}_D$ est très ample sur $\mathbb{V}((\mathcal{L}_D)^{\otimes -1})$. En fait, considérons le morphisme canonique

$$\Sigma \rightarrow \mathbb{P}(H^0(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma(1) \otimes p^* \mathcal{L}_D)) = \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{L}_D) \oplus k) = \mathbb{P}_\Sigma$$

et son image S . Notons $s_\infty \in \mathbb{P}_\Sigma(k)$ le point défini par la projection sur le second facteur $H^0(X, \mathcal{L}_D) \oplus k \rightarrow k$. Alors on a une projection

$$\mathbb{P}_\Sigma - \{s_\infty\} = \mathbb{V}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X}(-1)) \rightarrow \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{L}_D)) = \mathbb{P}_X$$

qui s'insère dans un carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^\circ \hookrightarrow & \mathbb{P}_\Sigma - \{s_\infty\} \\ p^\circ \downarrow & \downarrow \\ X \hookrightarrow & \mathbb{P}_X \end{array}$$

où les flèches verticales sont des fibrés en droites et les flèches horizontales sont les flèches canoniques. On a $s_\infty \in S(k)$ et son image réciproque dans Σ est le diviseur à l'infini Σ_∞ complémentaire de Σ° dans Σ . On a donc un isomorphisme $\Sigma^\circ \xrightarrow{\sim} S - \{s_\infty\}$. Autrement dit, le morphisme $\Sigma \rightarrow S$ contracte exactement le diviseur Σ_∞ sur le point s_∞ .

Rappelons que pour tout entier $N \geq 1$ on a

$$H^0(\Sigma, (\mathcal{O}_\Sigma(1) \otimes p^* \mathcal{L}_D)^{\otimes N}) = \bigoplus_{i=0}^N H^0(X, (\mathcal{L}_D)^{\otimes i})$$

qui est l'ensemble des k -points de l'espace de Hitchin $\mathbb{A}_{U(N)}$ pour le groupe unitaire $U(N)$. Une section $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_{U(N)}(k)$ où $a_0 \neq 0$, ne s'annule pas sur le diviseur Σ_∞ .

Prenons un voisinage de Zariski U de x_0 dans X et une trivialisaton de \mathcal{L}_D sur U qui identifie la restriction de $\mathbb{V}((\mathcal{L}_D)^{\otimes -1})$ à U avec la droite affine \mathbb{A}_U^1 . On en déduit une identification de $\mathbb{A}_{\mathcal{O}_F}^1$ avec $\mathbb{V}((\mathcal{L}_D)^{\otimes -1}) \times_X X_{x_0}$ où X_{x_0} est le complété de X en x_0 .

Pour $i \in I$ soit $Q_i(T) \in \mathcal{O}_F[T]$ un polynôme comme dans 4.3. On note $Q_J(T) = \prod_{i \in J} Q_i(T)$ pour toute partie J de I . Pour $i \in I$ notons $\overline{Q}_i(T) \in k[T]$ la réduction modulo ϖ_F de $Q_i(T)$ et notons $\overline{Q}_J(T) = \prod_{i \in J} \overline{Q}_i(T)$ pour toute partie J de I . Soit $m = m_I$ un entier naturel comme dans les lemmes 4.3.1 et 4.3.2, et

$$Z_m = Z_{I,m} = \text{Spec}(\mathcal{O}_F[T] / \langle \overline{Q}(t)^{mn}, \varpi_F^m \rangle)$$

le sous-schéma fini comme dans 4.3, vu comme un sous-schéma fermé de Σ . Dans Z_m on a le sous-schéma fermé $\text{Spec}(\mathcal{O}_F[T] / Q_J(T)) \cap Z_m$ pour chaque sous-ensemble $J \subset I$. En prenant une partition $I = I_1 \amalg I_2$ comme dans la section (4.1), on a un sous-schéma fermé

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_F[T] / Q_{I_\alpha}(T)) \cap Z_m$$

pour chaque $\alpha \in \{1, 2\}$.

Au-dessus du point x_∞ de X choisissons arbitrairement deux k -points distincts $y_{\infty, \alpha}$, $\alpha \in \{1, 2\}$.

PROPOSITION 4.5.1. *Il existe des entiers naturels $N_\alpha \geq n_\alpha$ et des points $a_\alpha \in \mathbb{A}_{U(N_\alpha)}(k)$ pour $\alpha \in \{1, 2\}$, tels que les courbes spectrales $Y_{a_\alpha} \subset \Sigma$ correspondantes vérifient les propriétés suivantes:*

- $Y_{a_\alpha} \cap Z_m = \text{Spec}(\mathcal{O}_F[T] / Q_{I_\alpha}(T)) \cap Z_m$ quel que soit $\alpha \in \{1, 2\}$,
- pour tout $\alpha \in \{1, 2\}$, la courbe spectrale Y_{a_α} est lisse en dehors de $Z_m \subset \Sigma$, elle est étale au-dessus de x_∞ et elle passe par $y_{\infty, \alpha}$,
- les deux courbes spectrales Y_{a_1} et Y_{a_2} se coupent transversalement en dehors de Z_m et ne se coupent pas au-dessus de x_∞ .

Démonstration. En appliquant le théorème de Bertini-Poonen 4.4.1, on peut d’abord trouver un entier $N_1 \geq n_1$ et une section $a_1 \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(N_1))$ tels que l’hypersurface correspondante $H_{a_1} \subset \mathbb{P}$ vérifie les propriétés suivantes:

- H_{a_1} ne passe pas ni par s_∞ , ni par les $y_{\infty,2}$, mais elle passe par $y_{\infty,1}$,
- H_{a_1} coupe transversalement l’image de $p^{-1}(x_\infty)$ dans S ,
- $H_{a_1} \cap S$ est lisse en dehors de l’image de Z_m dans S et son intersection avec Z_m est égale à $\text{Spec}(\mathcal{O}_F[T]/Q_{I_1}(T)) \cap Z_m$.

Bien entendu, le fermé $Z \subset \mathbb{P}$ dans l’énoncé 4.4.1 du théorème de Bertini-Poonen doit être la réunion de notre Z_m et des points s_∞ et $y_{\infty,i}$ avec $i \neq 1$, ainsi que du premier voisinage infinitésimal de $y_{\infty,1}$ dans \mathbb{P} . De plus la fonction $z \in H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ doit être choisie pour que H_{a_1} ne passe pas par s_∞ , ni par $y_{\infty,i}$ avec $i \neq 1$, qu’elle passe par $y_{\infty,1}$, et enfin qu’elle coupe Z_m et le premier voisinage infinitésimal de $y_{\infty,1}$ comme on le souhaite.

On prend alors pour Y_{a_1} l’image réciproque de $H_{a_1} \cap S$ dans Σ .

En appliquant de nouveau le théorème de Bertini-Poonen 4.4.1, on peut trouver un entier $N_2 \geq n_2$ et une section $a_2 \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(N_2))$ telle que l’hypersurface $H_{a_2} \subset \mathbb{P}$ correspondante vérifie les propriétés suivantes:

- H_{a_2} ne passe pas ni par s_∞ , ni par $y_{\infty,1}$, mais elle passe par $y_{\infty,2}$,
- H_{a_2} coupe transversalement l’image de $p^{-1}(x_\infty)$ dans S ,
- $H_{a_2} \cap S$ est lisse en dehors de l’image de Z_m dans S et son intersection avec Z_m est égale à $\text{Spec}(\mathcal{O}_F[T]/Q_{I_2}(T)) \cap Z_m$,
- en dehors de Z_m , H_{a_2} coupe transversalement H_{a_1} .

On prend alors pour Y_{a_2} l’image réciproque de $H_{a_2} \cap S$ dans Σ . □

LEMME 4.5.2. *Supposons que $\text{deg}(D) > \text{long}(Z_m)$. Alors les courbes Y_{a_α} construites dans la proposition précédente, ainsi que leurs revêtements doubles étales Y'_{a_α} sont automatiquement géométriquement irréductibles. En particulier, le point géométrique $a = (a_1, a_2)$ est un point elliptique au sens de la section (2.8).*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $\bar{Y}'_{a_\alpha} = Y'_{a_\alpha} \otimes_k \bar{k}$ est irréductible pour tout $\alpha \in \{1, 2\}$. Raisonnons par l’absurde en supposant que $\bar{Y}'_{a_\alpha} = \bar{Y}'_{a_\alpha,1} \cup \bar{Y}'_{a_\alpha,2}$ où $\bar{Y}'_{a_\alpha,j}$ est une courbe finie et plate de degré $N_{\alpha,j} \geq 1$ au-dessus de $\bar{X}' = X' \otimes_k \bar{k}$. En particulier, on a $N_{\alpha,1} + N_{\alpha,2} = N_\alpha$. D’après le lemme 2.5.3, la composante $\bar{Y}'_{a_\alpha,j}$ est le diviseur d’une section de

$$H^0(\Sigma' \otimes_k \bar{k}, (\mathcal{O}_{\Sigma'}(1) \otimes p'^* \mathcal{O}_{X'}(2D))^{\otimes N_{\alpha,j}}).$$

L'intersection $\bar{Y}'_{a_\alpha,1} \cap \bar{Y}'_{a_\alpha,2}$ est alors un sous-schéma fermé fini de $\Sigma' \otimes_k \bar{k}$ de longueur

$$2N_{\alpha,1}N_{\alpha,2} \deg(D) \geq 2 \deg(D) > 2 \text{long}(Z_m).$$

Par conséquent, cette intersection ne peut pas être entièrement contenue dans l'image réciproque de $Z_m \otimes_k \bar{k}$ par $\pi_\Sigma : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ puisque cette image réciproque est de longueur $2 \text{long}(Z_m)$. Mais, si $\bar{Y}'_{a_\alpha,1}$ coupait $\bar{Y}'_{a_\alpha,2}$ en dehors de $\pi_\Sigma^{-1}(Z_m \otimes_k \bar{k})$, la réunion \bar{Y}'_{a_α} de $\bar{Y}'_{a_\alpha,1}$ et $\bar{Y}'_{a_\alpha,2}$ ne pourrait pas être lisse en dehors de $\pi_\Sigma^{-1}(Z_m \otimes_k \bar{k})$, d'où une contradiction et le lemme est démontré. \square

4.6. *Fin de la démonstration du lemme fondamental.* Considérons toujours la situation locale rappelée en (4.1). Fixons de plus une partition non triviale $I = I_1 \amalg I_2$ comme dans l'énoncé du théorème 1.5.1.

En utilisant les résultats déjà obtenus dans ce chapitre on obtient la proposition suivante.

PROPOSITION 4.6.1. *Pour $\deg(D)$ assez grand il existe*

- un entier $N \geq 1$ et une partition $N = N_1 + N_2$ en entiers $N_1, N_2 > 0$,
- un point $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{A}_H(k)$ de l'espace de Hitchin pour le groupe endoscopique $H = \text{U}(N_1) \times \text{U}(N_2)$ du groupe unitaire $\text{U}(N)$,
- un point fermé z_0 de l'intersection $Z = Y_{a_1} \cap Y_{a_2}$ des courbes spectrales Y_{a_1} et Y_{a_2} pour $\text{U}(N_1)$ et $\text{U}(N_2)$, composantes de la courbe spectrale $Y_a = Y_{a_1} + Y_{a_2} \subset \Sigma$ pour $\text{U}(N)$,

ayant les propriétés suivantes:

- pour $\alpha = 1, 2$, Y_{a_α} et son revêtement double étale Y'_{a_α} sont géométriquement irréductibles,
- Y_a est étale au-dessus du point x_∞ de X et, pour $\alpha = 1, 2$ il existe au moins un point rationnel $y_{\infty,\alpha}$ de Y_{a_α} au-dessus de x_∞ ,
- en tout point fermé z de $Z - \{z_0\}$, les deux courbes spectrales Y_{a_1} et Y_{a_2} se coupent transversalement,
- le corps résiduel de z_0 est k , z_0 est inerte dans Z' et a fortiori, si on note x_0 son image par la projection $p : \Sigma \rightarrow X$, x_0 est inerte dans X' ,
- si on note x'_0 et z'_0 les uniques points fermés de X' et de Z' au-dessus de x_0 et z_0 , et si on fixe une identification du complété de l'anneau local \mathcal{O}_{X',x'_0} à $\mathcal{O}_{F'}$ compatible aux involutions τ , le complétée de la \mathcal{O}_{X',x'_0} -algèbre finie et plate $\mathcal{O}_{Y'_{a_\alpha},z'_0}$ est isomorphe à la $\mathcal{O}_{F'}$ -algèbre $\mathcal{O}_{F'}[T]/(P_{I_\alpha}(T))$, et ce de manière compatible aux involutions τ .

Il résulte alors du théorème 3.10.6 qu'avec les notations de la section (3.10), on a l'égalité

$$\begin{aligned} & \prod_{z \in Z^{\text{inerte}}} \left| \frac{(\tilde{A}_z^\times)^{\tau^* = (-)^{-1}}}{(A_z^\times)^{\tau^* = (-)^{-1}}} \right| \left(\sum_{m_z \in [\mathcal{M}(z)/P(z)](k)_\#} \frac{\kappa(\text{cl}_{\mathcal{M}(z)}(m_z))}{|\text{Aut}(m_z)|} \right) \\ &= \prod_{z \in Z^{\text{inerte}}} (|\kappa(z)|)^{r_z} \left| \frac{(\tilde{A}_z^\times)^{\tau^* = (-)^{-1}}}{(A_{1,z}^\times \times A_{2,z}^\times)^{\tau^* = (-)^{-1}}} \right| \left(\sum_{n_z \in [\mathcal{N}(z)/Q(z)](k)_\#} \frac{1}{|\text{Aut}(n_z)|} \right) \end{aligned}$$

pour chacun des deux caractères endoscopiques $\kappa : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rightarrow \{\pm 1\}$. Pour conclure, nous allons:

- montrer par un calcul explicite que, pour chaque $z \in Z^{\text{inerte}} - \{z_0\}$, les facteurs indexés par z des deux produits ci-dessus sont égaux;
- identifier les facteurs indexés par z_0 aux deux membres du théorème 1.5.1 que l'on cherche à démontrer.

Commençons par donner une autre reformulation de chacun des facteurs des produits de l'égalité ci-dessus.

Fixons $z \in Z^{\text{inerte}}$ et notons z' l'unique point fermé de Z' au-dessus de z . Notons $s = [\kappa(z) : k]$; on a alors $[\kappa(z') : k] = 2s$. Puisque $\kappa(z')$ est un corps, $\text{Frob}_k^{\mathbb{Z}}$ agit transitivement sur $\text{Hom}_k(\kappa(z'), \bar{k})$. De plus, l'involution induite par l'action de τ sur $\kappa(z')$ coïncide avec l'action de Frob_k^s sur $\text{Hom}_k(\kappa(z'), \bar{k})$.

Quitte à choisir un point base ξ_0 dans $\text{Hom}_k(\kappa(z'), \bar{k})$, on peut identifier de façon unique cet ensemble à

$$\text{Hom}_k(\kappa(z'), \bar{k}) \cong \{0, 1, \dots, 2s - 1\} \cong \mathbb{Z}/2s\mathbb{Z}$$

de telle sorte que, via cette bijection, Frob_k et τ agissent sur $\mathbb{Z}/2s\mathbb{Z}$ par $i \mapsto i + 1$ et par $i \mapsto i + s$. Pour tout $i = 0, 1, \dots, 2s - 1$, on note ξ_i l'élément correspondant de $\text{Hom}_k(\kappa(z'), \bar{k})$.

Soit $A = A_z$ le complété de l'anneau local de la courbe Y' en le point z' ; A est muni d'une involution τ . Soit $B = B_z$ le complété de l'anneau local de Y en le point z ; B est alors le sous-anneau des éléments $a \in A$ tels que $\tau(a) = a$. La \bar{k} -algèbre $\bar{A} = A \hat{\otimes}_k \bar{k}$ se décompose en un produit

$$\bar{A} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^{2s-1} \bar{A}_i$$

où $\bar{A}_i = A \hat{\otimes}_{\kappa(z'), \xi_i} \bar{k}$.

L'automorphisme $A \hat{\otimes}_k \text{Frob}_k$ de $\bar{A} = A \hat{\otimes}_k \bar{k}$ s'écrit

$$A \hat{\otimes}_k \text{Frob}_k(\alpha_0, \dots, \alpha_{2s-1}) = (\varphi_{2s-1}(\alpha_{2s-1}), \varphi_0(\alpha_0), \dots, \varphi_{2s-2}(\alpha_{2s-2}))$$

où les $\varphi_i : \bar{A}_i \rightarrow \bar{A}_{i+1}$ sont des bijections Frob_k -linéaires. Pour tout entier m notons φ_i^m le composé

$$\varphi_i^m = \varphi_{i+m-1} \circ \cdots \circ \varphi_{i+1} \circ \varphi_i : \bar{A}_i \rightarrow \bar{A}_{i+m}.$$

En particulier, $\varphi_0^{2s} : \bar{A}_0 \rightarrow \bar{A}_0$ est l'automorphisme Frob_k^{2s} -linéaire $A \widehat{\otimes}_{\kappa(z'), \xi_0} \text{Frob}_k^{2s}$, de sorte qu'on peut identifier A au sous-anneau de \bar{A}_0 des éléments $a_0 \in \bar{A}_0$ qui vérifient $\varphi_0^{2s}(a_0) = a_0$.

L'automorphisme $\tau \widehat{\otimes}_k \bar{k}$ de \bar{A} se décompose en le produit des isomorphismes \bar{k} -linéaires $\tau_i : \bar{A}_i \rightarrow \bar{A}_{i+s}$ qui vérifient les relations $\tau_{s+i} \circ \varphi_i^s = \varphi_{i+s}^s \circ \tau_i$. En particulier, on a l'automorphisme Frob_k^s -linéaire

$$\bar{\tau}_0 = \varphi_s^s \circ \tau_0 = \tau_s \circ \varphi_0^s : \bar{A}_0 \rightarrow \bar{A}_0$$

tel que $(\bar{\tau}_0)^2 = \varphi_0^{2s}$, de sorte qu'on peut aussi identifier B au sous-anneau de \bar{A}_0 formé des éléments $a_0 \in \bar{A}_0$ tels que $\bar{\tau}_0(a_0) = a_0$.

L'anneau total des fractions $\text{Frac}(B)$ est un produit de corps

$$\text{Frac}(B) = E_J = \prod_{j \in J} E_j.$$

Pour tout $j \in J$, notons κ_j le corps résiduel de E_j ; κ_j contient naturellement $\kappa(z)$. On a

$$\text{Frac}(A) = E'_J = \prod_{j \in J} E'_j$$

où, pour chaque $j \in J$, $E'_j = E_j \widehat{\otimes}_{\kappa(z)} \kappa(z')$ reste un corps de corps résiduel $\kappa'_j = \kappa_j \otimes_{\kappa(z)} \kappa(z')$. En effet, dans le cas $z = z_0$, c'est notre hypothèse de départ rappelée dans la section (4.1). Dans le cas $z \neq z_0$, le point z est un point double de Y à branches rationnelles sur $\kappa(z)$, de sorte que l'ensemble J a deux éléments j et que pour chacun de ces deux éléments on a $\kappa_j = \kappa(z)$. Pour tout $j \in J$, notons $s_j = \deg[\kappa_j : k]$; alors s_j est divisible par s et s_j/s est un nombre impair; autrement dit, on a

$$s_j \equiv s \pmod{2s}.$$

Pour chaque $j \in J$ on choisit un plongement $\zeta_{j,0} : \kappa'_j \hookrightarrow \bar{k}$ qui prolonge le plongement $\xi_0 : \kappa(z') \hookrightarrow \bar{k}$. Ce choix induit une bijection

$$\mathbb{Z}/2s_j\mathbb{Z} \cong \text{Hom}_k(\kappa'_j, \bar{k}), \quad i_j \mapsto \zeta_{j,i_j}.$$

qui rend commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_k(\kappa'_j, \bar{k}) & \longrightarrow & \text{Hom}_k(\kappa(z'), \bar{k}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}/2s_j\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2s\mathbb{Z} \end{array}$$

dont la flèche horizontale du haut est la restriction de κ'_j à $\kappa(z')$.

Considérons l'ensemble

$$\bar{J} = \{(j, i_j) \mid j \in J, i_j \in \mathbb{Z}/2s_j\mathbb{Z}\}.$$

On a alors

$$\text{Frac}(\bar{A}) = \prod_{(j, i_j) \in \bar{J}} \bar{E}_{j, i_j}$$

où $\bar{E}_{j, i_j} = E'_j \widehat{\otimes}_{\kappa'_j, \zeta_{j, i_j}} \bar{k}$; chaque élément $a \in \text{Frac}(\bar{A})$ s'écrit donc sous la forme $a = (a_{j, i_j})_{(j, i_j) \in \bar{J}}$. Par ailleurs, on a la décomposition

$$\text{Frac}(\bar{A}_i) = \prod_{\substack{j \in J \\ i_j \equiv i \pmod{2s}}} \bar{E}_{j, i_j},$$

de sorte que chaque élément $a \in \text{Frac}(\bar{A})$ s'écrit aussi sous la forme $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}/2s\mathbb{Z}}$ avec $a_i \in \text{Frac}(\bar{A}_i)$, quitte à regrouper les termes

$$a_i = (a_{j, i_j})_{(j, i_j) \in \bar{J}, i_j \equiv i \pmod{2s}}.$$

L'automorphisme de $\text{Frac}(\bar{A})$ qui se déduit de $A \widehat{\otimes}_k \text{Frob}_k : \bar{A} \rightarrow \bar{A}$, se décompose en le produit des homomorphismes Frob_k -linéaires $\varphi_{j, i_j} : \bar{E}_{j, i_j} \rightarrow \bar{E}_{j, i_j+1}$. De même, $\tau : \text{Frac}(\bar{A}) \rightarrow \text{Frac}(\bar{A})$ se décompose en le produit des homomorphismes \bar{k} -linéaires $\tau_{j, i_j} : \bar{E}_{j, i_j} \rightarrow \bar{E}_{j, i_j+s_j}$.

Soit $\tilde{P}(z)(\bar{k}) \subset \text{Frac}(\bar{A})^\times$ le sous-groupe formé des $a \in \text{Frac}(\bar{A})^\times$ qui vérifient $\tau(a)a = 1$. Par définition $P(z)(\bar{k})$ est le quotient de $\tilde{P}(z)(\bar{k})$ par son sous-groupe $\bar{A}^\times \cap \tilde{P}(z)(\bar{k})$.

On vérifie que $\tilde{P}(z)(\bar{k}) \subset \text{Frac}(\bar{A})^\times$ est stable par Frob_k . Le groupe $\tilde{P}(z)(\bar{k})$ agit donc sur lui-même par la Frob_k -conjugaison $(b, a) \rightarrow \text{Frob}_k(b)ab^{-1} = \text{Frob}_k(b)b^{-1}a$ puisque $\tilde{P}(z)(\bar{k})$ est commutatif. Cette Frob_k -conjugaison sur $\tilde{P}(z)(\bar{k})$ induit bien sûr par passage au quotient la Frob_k -conjugaison sur $P(z)(\bar{k})$.

PROPOSITION 4.6.2. *L'homomorphisme*

$$\tilde{P}(z)(\bar{k}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$$

qui associe à $a = (a_{j, i_j})_{(j, i_j) \in \bar{J}}$ l'élément $(\lambda_j)_{j \in J}$, où $\lambda_j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est l'unique élément tel que

$$\sum_{i_j=0}^{s_j-1} \text{val}_{\bar{E}_{j, i_j}}(a_{j, i_j}) \equiv \lambda_j \pmod{2},$$

induit un isomorphisme du groupe des classes de Frob_k -conjugaison de $\tilde{P}(z)(\bar{k})$ sur le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$.

Cet isomorphisme induit à son tour un isomorphisme du groupe des classes de Frob_k -conjugaison de $P(z)(\bar{k})$ sur le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$.

Démonstration. Soit \widetilde{A} le normalisé de \overline{A} dans $\text{Frac}(\overline{A})$ et soit $P^0(z)(\overline{k})$ le groupe des éléments $a \in \widetilde{A}^\times$ tels que $\tau(a)a = 1$. Un théorème de Lang assure que l'isogénie $P^0(z)(\overline{k}) \rightarrow P^0(z)(\overline{k})$ définie par $b \mapsto \text{Frob}_k(b)b^{-1}$ est surjective. On en déduit que l'homomorphisme canonique du groupe des classes de Frob_k -conjugaison de $\widetilde{P}(z)(\overline{k})$ sur le groupe des classes de Frob_k -conjugaison de $\widetilde{P}(z)(\overline{k})/P^0(z)(\overline{k})$ est un isomorphisme.

Le groupe $\widetilde{P}(z)(\overline{k})/P^0(z)(\overline{k})$ est canoniquement isomorphe au groupe

$$\{d = (d_{j,i_j})_{(j,i_j) \in \overline{J}} \in \mathbb{Z}^{\overline{J}} \mid d_{j,i_j} + d_{j,i_j+s_j} = 0\}.$$

On a donc un isomorphisme $\widetilde{P}(z)(\overline{k})/P^0(z)(\overline{k}) \cong \mathbb{Z}^{|\overline{J}|/2}$ en ne gardant parmi les composantes de d que les composantes d_{j,i_j} où $i_j = 0, 1, \dots, s_j - 1$, les autres composantes d_{j,i_j} où $i_j = s_j, s_j + 1, \dots, 2s_j - 1$ étant uniquement déterminées par les relations $d_{j,i_j} + d_{j,i_j+s_j} = 0$.

L'endomorphisme Frob_k agit sur le groupe $\widetilde{P}(z)(\overline{k})/P^0(z)(\overline{k})$ par $\text{Frob}_k(d) = d'$ avec $d'_{j,i_j} = d_{j,i_j-1}$. Dans l'écriture $\mathbb{Z}^{|\overline{J}|/2}$ pour ce groupe, on a donc

$$\text{Frob}_k((d_{j,0}, d_{j,1}, \dots, d_{j,s_j-1})_{j \in J}) = (-d_{j,s_j-1}, d_{j,0}, \dots, d_{j,s_j-2})_{j \in J}.$$

Par suite l'isogénie de Lang,

$$\mathcal{L}_k : \mathbb{Z}^{|\overline{J}|/2} \rightarrow \mathbb{Z}^{|\overline{J}|/2}, \quad d \mapsto \text{Frob}_k(d)d^{-1},$$

est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k((d_{j,0}, d_{j,1}, \dots, d_{j,s_j-1})_{j \in J}) \\ = (-d_{j,s_j-1} - d_{j,0}, d_{j,0} - d_{j,1}, \dots, d_{j,s_j-2} - d_{j,s_j-1})_{j \in J} \end{aligned}$$

et a pour conoyau la flèche $\mathbb{Z}^{|\overline{J}|/2} \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$ qui envoie $(d_{j,i_j})_{j \in J, i_j=0,1,\dots,s_j-1}$ sur $(\lambda_j)_{j \in J}$ où $\lambda_j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est la classe modulo 2 de la somme $\sum_{i_j=0}^{s_j-1} d_{j,i_j}$.

Puisque l'homomorphisme $(\overline{A}^\times)^{\tau=-1} \rightarrow (\overline{A}^\times)^{\tau=-1}$ défini par $b \mapsto \text{Fob}_k(b)b^{-1}$ est surjectif, l'homomorphisme

$$\widetilde{P}(z)(\overline{k}) \rightarrow P(z)(\overline{k}) = \widetilde{P}(z)(\overline{k})/(\overline{A}^\times)^{\tau=-1}$$

induit un isomorphisme entre les groupes des classes de Frob_k -conjugaisons et la proposition est démontrée. \square

Pour chaque $\lambda \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$, on choisit un représentant $a(\lambda) \in P(z)(\overline{k})$ de la classe de Frob_k -conjugaison correspondante comme suit. On choisit d'abord une fois pour toutes un représentant arbitraire $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{Z}^J$ de la classe $\lambda \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$. Puis, pour chaque $j \in J$, on choisit une uniformisante ϖ_j de E_j . Cette uniformisante définit une uniformisante $\varpi'_j = \varpi_j$ de l'extension non ramifiée E'_j de E_j et une uniformisante $\varpi_{j,i_j} = \varpi_j$ de l'extension non ramifiée \overline{E}_{j,i_j} pour chaque $j = 0, 1, \dots, 2s_j - 1$. Puisque $\varpi_{j,0}$ provient de E_j , on a

$$\overline{\tau}_0(\varpi_{j,0}) = \varpi_{j,0}$$

et *a fortiori* $\varphi_0^{2s_j}(\varpi_{j,0}) = \varpi_{j,0}$. On définit alors l'élément $a(\lambda) \in \tilde{P}(z)(\bar{k})$ de coordonnées $a_{j,i_j}(\lambda) \in \bar{E}_{j,i_j}^\times$ comme suit. Pour tout $(j, i_j) \in \bar{J}$ on pose

$$a_{j,i_j}(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_j \not\equiv 0 \pmod{s}, \\ \tilde{\varpi}_{j,i_j}^{\lambda_j} & \text{si } i_j \equiv 0 \pmod{2s}, \\ \tilde{\varpi}_{j,i_j}^{-\lambda_j} & \text{si } i_j \equiv s \pmod{2s}. \end{cases}$$

Comme le nombre s_j/s des classes de conjugaison modulo $2s_j$ qui sont congrues à 0 modulo $2s$ est impair, l'image de $a(\lambda)$ dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$ est bien λ .

Regroupant les termes $a_{j,i_j}(\lambda)$ suivant la classe modulo $2s$ de i_j , on obtient

$$a(\lambda) = (a_0(\lambda), a_1(\lambda), \dots, a_{2s-1}(\lambda)) = (c_\lambda, \overbrace{1, \dots, 1}^{s-1}, \tau_0(c_\lambda)^{-1}, \overbrace{1, \dots, 1}^{s-1})$$

où $a_i(\lambda) \in \text{Frac}(\bar{A}_i)$ pour chaque $i = 0, 1, \dots, 2s - 1$ et

$$c_\lambda = (\tilde{\varpi}_{j,i_j}^{\lambda_j})_{j \in J, i_j \equiv 0 \pmod{2s}}$$

est un élément de $\text{Frac}(\bar{A}_0)^\times$ qui vérifie $\bar{\tau}_0(c_\lambda) = c_\lambda$.

Rappelons que $\text{Frac}(B)$ s'identifie au sous-anneau de $\text{Frac}(\bar{A}_0)$ formé des éléments fixes sous l'automorphisme Frob_k^s -linéaire $\bar{\tau}_0$. On peut donc voir c_λ comme un élément de $\text{Frac}(B)$ qui n'est autre que

$$c_\lambda = (\tilde{\varpi}_j^{\lambda_j})_{j \in J}$$

dans la décomposition $\text{Frac}(B) = \prod_{j \in J} E_j$.

Les objets de la catégorie $[\mathcal{M}(z)/P(z)](k)$ sont les couples (\mathcal{V}, a) où $\mathcal{V} \in \mathcal{M}(z)(\bar{k})$ et $a \in P(z)(\bar{k})$ satisfont à la relation $\text{Frob}_k(\mathcal{V}) = a \cdot \mathcal{V}$. Étant donnés deux objets (\mathcal{V}, a) et (\mathcal{V}', a') de $[\mathcal{M}(z)/P(z)](k)$ comme ci-dessus, un isomorphisme du premier dans le second est un élément $b \in P(z)(\bar{k})$ tel que $\mathcal{V}' = b \cdot \mathcal{V}$ et que

$$a' = \text{Frob}_k(b)ab^{-1}.$$

Les automorphismes d'un objet (\mathcal{V}, a) de $[\mathcal{M}(z)/P(z)](k)$ sont donc les éléments $b \in P(z)(k)$ tels que $b\mathcal{V} = \mathcal{V}$.

La proposition précédente admet le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.6.3. *La catégorie $[\mathcal{M}(z)/P(z)](k)$ est équivalente à sa sous-catégorie pleine dont les objets sont les $(\mathcal{V}, a(\lambda)) \in \text{ob}[\mathcal{M}(z)/P(z)](k)$ pour $\lambda \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$ et dont l'ensemble des morphismes d'un objet $(\mathcal{V}, a(\lambda))$ vers un autre objet $(\mathcal{V}', a(\lambda'))$ est*

$$\text{Hom}((\mathcal{V}, a(\lambda)), (\mathcal{V}', a(\lambda'))) = \begin{cases} \{b \in P(z)(k) \mid b \cdot \mathcal{V} = \mathcal{V}'\} & \text{si } \lambda = \lambda', \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. La proposition précédente implique que pour tout objet (\mathcal{V}, a) de $[\mathcal{M}(z)/P(z)](k)$, il existe $\lambda \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$ et $b \in P(z)(\bar{k})$ tel que $a(\lambda) = \text{Frob}_k(b)ab^{-1}$, et que de plus λ est uniquement déterminé par cette relation. \square

On se propose maintenant de décrire la sous-catégorie pleine de $[\mathcal{M}(z)/P(z)](k)$ des objets (\mathcal{V}, a) avec $a = a(\lambda)$ pour un $\lambda \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$ fixé.

Dans la section (3.10) on a pris l'objet de Kostant de $\mathcal{N}(k)$ et son image dans $\mathcal{M}(k)$ comme points base pour définir les variantes locales $\mathcal{M}(z)$ et $\mathcal{N}(z)$ de \mathcal{M} et \mathcal{N} . L'ensemble J des branches de Y au point fermé z se découpe en deux parties disjointes $J = J_1 \amalg J_2$ où J_α est l'ensemble des branches de Y_α au point fermé z . On a donc les décompositions

$$E_J = E_{J_1} \times E_{J_2}$$

où $E_{J_\alpha} = \prod_{j \in J_\alpha} E_j$ pour tout $\alpha = 1, 2$. Notons A_α le complété de l'anneau local de Y'_α en z' ; l'anneau total des fractions de A_α est bien entendu $\text{Frac}(A_\alpha) = E_{J_\alpha}$.

L'objet de Kostant de \mathcal{N} , restreint au complété formel de Y' en z' , est la somme directe de deux couples $(\mathcal{K}_\alpha, \iota_{\mathcal{K}_\alpha})$, un pour chaque $\alpha = 1, 2$, où \mathcal{K}_α est un A_α -module libre de rang 1 et $\iota_{\mathcal{K}_\alpha}$ est une structure unitaire

$$\iota_{\mathcal{K}_\alpha} : \tau^* \mathcal{K}_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_\alpha^\vee = \text{Hom}_{A_\alpha}(\mathcal{K}_\alpha, \omega_\alpha).$$

On a noté ici ω_α le complété formel de la fibre en z' du dualisant relatif $\omega_{Y'_\alpha/X'}$ de Y'_α/X' ; c'est un sous- A_α -module de E_{J_α} , libre de rang 1. Fixons un générateur $c_{J_\alpha}^0$ de ω_α comme dans la section (1.4).

Le couple $(\mathcal{K}_\alpha, \iota_{\mathcal{K}_\alpha})$ est isomorphe au couple $(A_\alpha, c_{J_\alpha}^0)$ où on note encore $c_{J_\alpha}^0$ la structure unitaire

$$\tau^* A_\alpha = A_\alpha \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A_\alpha}(A_\alpha, \omega_\alpha) = \omega_\alpha, \quad 1 \rightarrow c_{J_\alpha}^0.$$

Fixons un tel isomorphisme ce qui nous permet de nous raccrocher au langage commode de la section (1.4). Soit F' l'anneau local complété de X' en le point fermé x' image de z' . Considérons la forme hermitienne

$$\Phi_{c_{J_\alpha}^0} : E'_{J_\alpha} \times E'_{J_\alpha} \rightarrow F'$$

définis par

$$(x, y) \mapsto \Phi_{c_{J_\alpha}^0}(x, y) = \text{Tr}_{E'_{J_\alpha}/F'}(c_{J_\alpha}^0 \tau(x)y).$$

D'après le lemme 1.4.2, A_α est un réseau auto-dual pour cette forme hermitienne. La fibre générique de $(\mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2, \iota_{\mathcal{K}_1} \oplus \iota_{\mathcal{K}_2})$ s'identifie à $E'_J = E'_{J_1} \times E'_{J_2}$ muni de la forme unitaire $c_{\mathcal{N}}^0 = c_{J_1}^0 \times c_{J_2}^0$.

La forme hermitienne $c_{\mathcal{N}}^0$ induit forme hermitienne $\bar{c}_{\mathcal{N}}^0$ sur

$$E'_J \widehat{\otimes}_k \bar{k} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=0}^{2s-1} \text{Frac}(\bar{A}_i)$$

qui à son tour induit une forme bilinéaire

$$\bar{c}_{\mathcal{N},i}^0 : \text{Frac}(\bar{A}_i) \times \text{Frac}(\bar{A}_{i+s}) \rightarrow F \widehat{\otimes}_{\kappa(x'), \xi_i} \bar{k}$$

pour chaque $i = 0, 1, \dots, 2s - 1$. Les éléments de $\mathcal{M}(z)(\bar{k})$ sont alors les collections $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_i)_i$ de sous- \bar{A}_i -modules $\mathcal{V}_i \subset \text{Frac}(\bar{A}_i)$ tels que $\text{Frac}(\bar{A}_i)\mathcal{V}_i = \text{Frac}(\bar{A}_i)$ et que les réseaux \mathcal{V}_i et \mathcal{V}_{i+s} sont orthogonaux par rapport à la forme bilinéaire $\bar{c}_{\mathcal{N},i}^0$.

L'endomorphisme de Frobenius agit sur cet ensemble par

$$\text{Frob}_k(\mathcal{V}_0, \dots, \mathcal{V}_{2s-1}) = (\varphi_{2s-1}(\mathcal{V}_{2s-1}), \varphi_0(\mathcal{V}_0), \dots, \varphi_{2s-2}(\mathcal{V}_{2s-2})).$$

PROPOSITION 4.6.4. *Soit $\lambda \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$ et $a(\lambda) \in P(z)(\bar{k})$ le représentant de la classe de Frobenius-conjugaison indexée par λ construit précédemment. La sous-catégorie pleine de $[\mathcal{M}(z)/P(z)](k)$ des couples (\mathcal{V}, a) avec $a = a(\lambda)$, est équivalente à la catégorie $[\mathcal{M}_\lambda(k)/P(z)(k)]$ dont:*

- les objets sont les sous- A -modules M de E'_J tels que $E'_J M = E'_J$ qui sont auto-duaux par rapport à la forme hermitienne

$$\Phi_{c_\lambda c_{\mathcal{N}}}^0(x, y) = \text{Tr}_{E'_J/F'}(c_\lambda c_{\mathcal{N}}^0 \tau(x)y)$$

où $c_\lambda = (\varpi_j^{\tilde{\lambda}_j})_{j \in J}$ et où $\tilde{\lambda} \in \mathbb{Z}^J$ est le relèvement de λ qu'on a choisi pour définir $a(\lambda)$;

- les morphismes d'un objet M vers un objet M' sont les éléments $b \in P(z)(k)$ tel que $bM = M'$.

Démonstration. Soit (\mathcal{V}, a) un objet de $[\mathcal{M}(z)/P(z)](k)$ avec

$$a = a(\lambda) = (c_\lambda, \overbrace{1, \dots, 1}^{s-1}, \tau_0(c_\lambda)^{-1}, \overbrace{1, \dots, 1}^{s-1})$$

pour un $\lambda \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$. La relation $\text{Frob}_k(\mathcal{V}) = a \cdot \mathcal{V}$ est alors équivalente aux relations suivantes $\mathcal{V}_i = \varphi_0^i(\mathcal{V}_0)$ pour tout $i = 1, \dots, s-1$, $\mathcal{V}_i = \varphi_s^{i-s}(\tau_0(c_\lambda))\varphi_0^i(\mathcal{V}_0)$ pour tout $i = s, \dots, 2s - 1$ et $c_\lambda \mathcal{V}_0 = \bar{\tau}_0(c_\lambda)\varphi_0^{2s}(\mathcal{V}_0)$. Or, par construction, on a $c_\lambda = \bar{\tau}_0(c_\lambda)$, de sorte qu'on a

$$\mathcal{V}_0 = \varphi_0^{2s}(\mathcal{V}_0).$$

Soit M l'ensemble des éléments de \mathcal{V}_0 qui sont fixés par φ_0^{2s} . Alors M est un sous- A -module de $E'_J = \{a \in \text{Frac}(\bar{A}_0) \mid \varphi_0^{2s}(a) = a\}$, sous-module qui vérifie $E'_J M = E'_J$.

De plus, \mathcal{V}_0 et $\mathcal{V}_s = \bar{\tau}_0(c_\lambda)\varphi_0^s(\mathcal{V}_0)$ sont orthogonaux par rapport à la forme bilinéaire

$$\bar{c}_{\mathcal{N},i}^0 : \text{Frac}(\bar{A}_i) \times \text{Frac}(\bar{A}_{i+s}) \rightarrow F \widehat{\otimes}_{\kappa(x'), \xi_i} \bar{k}$$

si et seulement si M est auto-dual par rapport à la forme hermitienne $\Phi_{c_\lambda c_{\mathcal{N}}}^0$. La proposition est donc démontrée. □

Traisons maintenant séparément les cas $z \neq z_0$ et le cas $z = z_0$. Dans le cas $z \neq z_0$, les deux courbes Y_{a_1} et Y_{a_2} sont lisses en le point z et leur intersection y est transversale. On a $J = \{1, 2\}$, $J_1 = \{1\}$, $J_2 = \{2\}$ et les uniformisantes ϖ_1 et ϖ_2 que l'on a fixé ci-dessus sont des uniformisante de Y_{a_1} et Y_{a_2} en z . En fait, on a $E'_\alpha = \kappa(z')((\varpi_\alpha))$,

$$A = \kappa(z')[[\varpi_1, \varpi_2]]/(\varpi_1, \varpi_2) \subset \kappa(z')((\varpi_1)) \times \kappa(z')((\varpi_2)) = \text{Frac}(A) = E'_J$$

et τ est le relèvement canonique de l'élément non trivial de $\text{Gal}(\kappa(z')/\kappa(z))$. On a sur E'_J la forme hermitienne $\Phi_{c_\lambda c_N^0}$ pour laquelle le normalisé

$$\tilde{A} = \kappa(z')[[\varpi_1]] \times \kappa(z')[[\varpi_2]] \subset E'_J$$

de A dans E'_J est un réseau auto-dual.

Le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^J$ a quatre éléments λ et on vérifie que:

- si $\lambda = (0, 1)$ ou $(1, 0)$, il n'y a aucun sous- A -réseau de E'_J qui soit auto-dual par rapport à la forme hermitienne $\Phi_{c_\lambda c_N^0}$;
- si $\lambda = (0, 0)$, \tilde{A} est le seul sous- A -réseau de E'_J qui est auto-dual par rapport à la forme hermitienne $\Phi_{c_\lambda c_N^0}$; de plus, pour tout $b \in P(z)(k)$, on a $b\tilde{A} = \tilde{A}$;
- si $\lambda = (1, 1)$, les sous- A -réseaux de E'_J qui sont auto-duaux par rapport à la forme hermitienne $\Phi_{c_\lambda c_N^0}$ forment un espace principal homogène sous l'action du groupe $P(z)(k)$.

Comme le groupe $P(z)(k)$ a $|\kappa(z)| + 1$ éléments et que $\kappa(0, 0) = 1$ et $\kappa(1, 1) = -1$, on en déduit que

$$\sum_{m_z \in [\mathcal{M}(z)/P(z)](k)_\#} \frac{\kappa(\text{cl}_{\mathcal{M}(z)}(m_z))}{|\text{Aut}(m_z)|} = -\frac{|\kappa(z)|}{|\kappa(z)| + 1}$$

et que

$$\left| \frac{(\tilde{A}_z^\times)^{\tau^* = (-)^{-1}}}{(A_z^\times)^{\tau^* = (-)^{-1}}} \right| = |\kappa(z)| + 1.$$

On vérifie facilement que $r_z = 1$, que

$$\left| \frac{(\tilde{A}_z^\times)^{\tau^* = (-)^{-1}}}{(A_{1,z}^\times \times A_{2,z}^\times)^{\tau^* = (-)^{-1}}} \right| = 1$$

et que

$$\sum_{n_z \in [\mathcal{N}(z)/Q(z)](k)_\#} \frac{1}{|\text{Aut}(n_z)|} = 1.$$

On a donc démontré que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\tilde{A}_z^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}}{(A_z^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}} \right| \left(\sum_{m_z \in [\mathcal{M}(z)/P(z)](k)_\sharp} \frac{\kappa(\text{cl}_{\mathcal{M}(z)}(m_z))}{|\text{Aut}(m_z)|} \right) \\ &= (-|\kappa(z)|)^{r_z} \left| \frac{(\tilde{A}_z^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}}{(A_{1,z}^\times \times A_{2,z}^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}} \right| \left(\sum_{n_z \in [\mathcal{N}(z)/Q(z)](k)_\sharp} \frac{1}{|\text{Aut}(n_z)|} \right) \end{aligned}$$

quel que soit $z \in Z^{\text{inerte}} - \{z_0\}$.

La formule du produit, obtenue plus haut dans cette section, montre que cette égalité vaut aussi pour $z = z_0$.

Enfin, dans le cas $z = z_0$, on a $J = I$, $J_\alpha = I_\alpha$ pour $\alpha = 1, 2$, et on se retrouve dans la situation du chapitre 1. Par définition des intégrales orbitales (cf. la section (1.5)), on a

$$\sum_{m_\lambda \in [\mathcal{M}_\lambda(k)/P(z)(k)]_\sharp} \frac{1}{|\text{Aut}(m_\lambda)|} = \frac{1}{|P(z)(k)|} \text{O}_{\gamma^I}^{c_\lambda c_N^\circ},$$

de sorte que

$$\sum_{m \in [\mathcal{M}(z)/P(z)](k)_\sharp} \frac{\kappa(\text{cl}_{\mathcal{M}(z)}(m_z))}{|\text{Aut}(m_z)|} = \sum_{\lambda \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^f} \frac{\kappa(\lambda)}{|P(z)(k)|} \text{O}_\gamma^{c_\lambda c_N^\circ} = \frac{1}{|P(z)(k)|} \text{O}_\gamma^\kappa.$$

Les mêmes arguments montrent que

$$\sum_{n \in [\mathcal{N}(z)/Q(z)](k)_\sharp} \frac{1}{|\text{Aut}(n)|} = \frac{1}{|Q(z)(k)|} \text{SO}_\gamma^H.$$

Comme

$$\frac{1}{|P(z)(k)|} \left| \frac{(\tilde{A}_z^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}}{(A_z^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}} \right| = \frac{1}{|Q(z)(k)|} \left| \frac{(\tilde{A}_z^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}}{(A_{1,z}^\times \times A_{2,z}^\times)^{\tau^*=(-)^{-1}}} \right|$$

on obtient l'égalité

$$\text{O}_\gamma^\kappa = (-|\kappa(z)|)^{r_z} \text{SO}_\gamma^H.$$

que l'on cherchait à démontrer. \square

A. Appendice

A.1. *Localisation à la Atiyah-Borel-Segal.* Soient S un k -schéma de type fini et $f : X \rightarrow S$ un S -schéma propre muni d'une action d'un S -schéma en groupes commutatifs P lisse et de type fini. Soient de plus T un S -schéma en tores, Λ un groupe commutatif de type fini et $T \times \Lambda \rightarrow P$ un homomorphisme. L'action de P induit des actions qui commutent de T et Λ sur le S -schéma X .

Soient $g : Y = X^T \rightarrow S$ le S -schéma des points fixes pour l'action de T et $f^T : [X/T] \rightarrow S$ le S -champ quotient pour l'action de T . Le groupe de type

fini Λ préserve le fermé $i : Y \hookrightarrow X$ et agit donc sur ce fermé et son ouvert complémentaire $j : U = X - Y \hookrightarrow X$; il agit aussi sur $[X/T]$ en préservant le fermé $[i] : [Z/T] \hookrightarrow [X/T]$ et l'ouvert complémentaire $[j] : [U/T] \hookrightarrow [X/T]$.

Considérons les faisceaux de cohomologie perverse

$${}^p\mathcal{H}^n(f_*\mathbb{Q}_\ell), {}^p\mathcal{H}^n(g_*\mathbb{Q}_\ell), {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T\mathbb{Q}_\ell), {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[i]_*\mathbb{Q}_\ell) \text{ et } {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[j]_!\mathbb{Q}_\ell)$$

sur S . L'action induite de Λ sur ces faisceaux se factorise à travers un quotient fini. En effet, comme P est de type fini il existe un sous-groupe d'indice fini $\Lambda' \subset \Lambda$ tel que, pour tout point géométrique s dans S et tout $\lambda \in \Lambda'$, on ait $\lambda_s \in P_s^0$, et d'après le lemme d'homotopie 3.2.3, Λ' agit trivialement sur les faisceaux ci-dessus.

On a donc des décompositions

$$\begin{aligned} {}^p\mathcal{H}^n(f_*\mathbb{Q}_\ell) &= \bigoplus_{\kappa} {}^p\mathcal{H}^n(f_*\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa}, & {}^p\mathcal{H}^n(g_*\mathbb{Q}_\ell) &= \bigoplus_{\kappa} {}^p\mathcal{H}^n(f_*\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa}, \\ {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T\mathbb{Q}_\ell) &= \bigoplus_{\kappa} {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa}, \end{aligned}$$

$${}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[i]_*\mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{\kappa} {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[i]_*\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa} \text{ et } {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[j]_!\mathbb{Q}_\ell) = \bigoplus_{\kappa} {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[j]_!\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa}.$$

selon les caractères d'ordre fini κ de Λ (tout du moins si tous ces caractères sont rationnels sur \mathbb{Q}_ℓ ; sinon, il faut étendre au préalable les scalaires à une extension finie de \mathbb{Q}_ℓ).

Considérons le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_X} & [X/T] \\ f \downarrow & & \downarrow [f] \quad \searrow f^T \\ S & \xrightarrow{\pi} & [S/T] \xrightarrow{\varepsilon} S \end{array}$$

où $[f]$ est le morphisme qui se déduit de f par le passage au quotient par l'action de T , où $\pi : S \rightarrow [S/T]$ est le T -torseur universel et où $\varepsilon : [S/T] \rightarrow S$ est le morphisme structural.

D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre, on a $\pi^*[f]_*\mathbb{Q}_\ell = f_*\mathbb{Q}_\ell$ et donc $\pi^*[f]_*\mathbb{Q}_\ell = \pi^*\varepsilon^*f_*\mathbb{Q}_\ell$ puisque $\varepsilon \circ \pi$ est l'identité de S . Comme π est lisse à fibres géométriquement connexes, on en déduit que

$${}^p\mathcal{H}^n([f]_*\mathbb{Q}_\ell) = {}^p\mathcal{H}^n(\varepsilon^*f_*\mathbb{Q}_\ell) = \varepsilon^*{}^p\mathcal{H}^n(f_*\mathbb{Q}_\ell)$$

pour tout entier n (cf. la Proposition 4.2.5 de [B-B-D]).

Soit $X^*(T)$ le faisceau étale sur S dont les sections sur un ouvert étale V de S sont les homomorphismes $V \times_S T \rightarrow \mathbb{G}_{m,V}$. D'après la théorie de Chern-Weil on a $\mathcal{H}^n(\varepsilon_*\mathbb{Q}_\ell) = (0)$ pour tout $n < 0$ et pour tout n impair, et pour tout entier $n \geq 0$, on a un isomorphisme

$$\mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)]^{2n} := \text{Sym}_{\mathbb{Q}_\ell}^n(X^*(T) \otimes_{\mathbb{Z}_S} \mathbb{Q}_{\ell,S}(-1)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^{2n}(\varepsilon_*\mathbb{Q}_\ell)$$

induit par la flèche

$$X^*(T) \rightarrow \mathcal{H}^2(\varepsilon_*\mathbb{Q}_\ell)(1)$$

qui envoie un caractère χ sur la classe de Chern du fibré inversible sur $[S/T]$ obtenu en poussant le T -torseur tautologique par $\chi : T \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}$.

La structure multiplicative et le morphisme $[f]^*$ munissent la somme formelle de faisceaux pervers

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T\mathbb{Q}_\ell),$$

ainsi que la somme formelle de faisceaux pervers

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T\mathbb{Q}_\ell)_\kappa,$$

pour tout κ , de structures de $\mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)]$ -modules gradués où

$$\mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)] := \bigoplus_n \mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)]^{2n}$$

est vu comme un faisceau en \mathbb{Q}_ℓ -algèbres graduées. Ces sommes infinies de faisceaux pervers n'ont *a priori* pas de sens. En fait il s'agit juste d'une façon commode d'écrire les choses: on pourrait très bien travailler degré par degré.

Supposons de plus que, pour un caractère κ_0 particulier de $\overline{\Lambda}$, les faisceaux pervers ${}^p\mathcal{H}^n(f_*\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0}$ sont purs de poids n pour tous $n \in \mathbb{Z}$.

PROPOSITION A.1.1. *Sous cette hypothèse, il existe un isomorphisme*

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} \cong \left(\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_*\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} \right) \otimes_{\mathbb{Q}_{\ell,S}} \mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)].$$

En particulier, cette somme directe est un module libre de type fini sur $\mathbb{Q}_\ell[X^(T)(-1)]$.*

Démonstration. On a la suite spectrale de Leray

$$E_2^{pq} = {}^p\mathcal{H}^p(\varepsilon_* {}^p\mathcal{H}^q([f]_*\mathbb{Q}_\ell)) \Rightarrow {}^p\mathcal{H}^{p+q}(f_*^T\mathbb{Q}_\ell).$$

compatible à l'action de Λ . Or on a vu que ${}^p\mathcal{H}^q([f]_*\mathbb{Q}_\ell) = \varepsilon^* {}^p\mathcal{H}^q(f_*\mathbb{Q}_\ell)$ pour tout entier q , de sorte que la formule de projection permet de récrire le terme E_2^{pq} de cette suite spectrale sous la forme

$$E_2^{pq} = {}^p\mathcal{H}^p(\varepsilon_*\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}_{\ell,S}} {}^p\mathcal{H}^q(f_*\mathbb{Q}_\ell)).$$

Comme $\varepsilon_*\mathbb{Q}_\ell$ est à cohomologie ordinaire lisse sur S , on a encore

$$E_2^{pq} = \mathcal{H}^p(\varepsilon_*\mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_{\ell,S}} {}^p\mathcal{H}^q(f_*\mathbb{Q}_\ell).$$

On en déduit la suite spectrale

$$E_2^{pq} = \mathcal{H}^p(\varepsilon_*\mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Q}_{\ell,S}} {}^p\mathcal{H}^q(f_*\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} \Rightarrow {}^p\mathcal{H}^{p+q}(f_*^T\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0}.$$

Le \mathbb{Q}_ℓ -faisceau lisse $\mathcal{H}^p(\varepsilon_*\mathbb{Q}_\ell)$ étant pur de poids p , l'hypothèse de pureté du faisceau pervers ${}^p\mathcal{H}^q(f_*T)_{\kappa_0}$ implique que cette dernière suite spectrale dégénère en E_2 puisque toutes ses flèches d_r^{pq} relient des termes de poids différents et sont donc nécessairement nulles. \square

Le triangle distingué habituel

$$[j]!\mathbb{Q}_{\ell,[U/T]} \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell,[X/T]} \rightarrow [i]_*\mathbb{Q}_{\ell,[Y/T]} \rightarrow$$

induit un triangle distingué

$$f_*^T[j]!\mathbb{Q}_\ell \rightarrow f_*^T\mathbb{Q}_\ell \rightarrow f_*^T[i]_*\mathbb{Q}_\ell \rightarrow$$

qui induit à son tour une suite exacte longue de faisceaux de cohomologie perverse sur S

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[j]!\mathbb{Q}_\ell) &\rightarrow {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T\mathbb{Q}_\ell) \rightarrow {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[i]_*\mathbb{Q}_\ell) \\ &\rightarrow {}^p\mathcal{H}^{n+1}(f_*^T[j]!\mathbb{Q}_\ell) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Cette suite exacte est équivariante par rapport à l'action du groupe de type fini Λ et induit donc une suite exacte

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[j]!\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} &\rightarrow {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} \rightarrow {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[i]_*\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} \\ &\rightarrow {}^p\mathcal{H}^{n+1}(f_*^T[j]!\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

On en déduit une flèche

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[j]!\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} \rightarrow \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0}$$

et une flèche de restriction

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} \rightarrow \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[i]_*\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0}$$

qui sont $\mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)]$ -linéaires graduées. Ici, on a

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[i]_*\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} = \left(\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_*\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} \right) \otimes_{\mathbb{Q}_{\ell,S}} \mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)]$$

puisque T agit trivialement sur Y .

PROPOSITION A.1.2. *Le $\mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)]$ -module gradué $\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_*^T[j]!\mathbb{Q}_\ell)$ est de torsion.*

Démonstration. Notons $h = f \circ j : U \rightarrow S$ et $[h] : [U/T] \rightarrow B(T/S)$ le morphisme quotient de h par l'action de T . On a

$$f_*^T[j]!\mathbb{Q}_\ell = \varepsilon_*[h]!\mathbb{Q}_\ell$$

où $\varepsilon : B(T/S) \rightarrow S$ est le morphisme structural.

On va en fait démontrer plus généralement que pour tout S -schéma $h : U \rightarrow S$ de type fini, muni d'une action de T qui relève l'action triviale de T sur S et qui est sans point fixe, le faisceau pervers

$$\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(\varepsilon_*[h]_!\mathbb{Q}_\ell)$$

sur S en modules gradués sur le faisceau de \mathbb{Q}_ℓ -algèbres $\mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)]$ est de torsion.

L'énoncé est local pour la topologie étale sur S . On peut donc supposer que $T = \mathbb{G}_{m,S}^r$ pour un entier $r \geq 1$, ou ce qui revient au même que l'on a une action de $T = \mathbb{G}_{m,k}^r$ sur X au-dessus de l'action triviale de T sur S .

Il existe une filtration finie de U par des parties fermées T -invariantes

$$U = U_0 \supset U_1 \supset \dots \supset U_p \supset U_{p+1} \supset \dots$$

et pour chaque p , un sous-tore $T_p \subset T$ tel que, quel que soit le point géométrique x de $U^p := U_p - U_{p+1}$, la composante neutre du fixateur $T_x \subset \kappa(x) \otimes_k T$ de x n'est autre que $\kappa(x) \otimes_k T_p$.

Alors, si on note $h^p : U^p \rightarrow S$ la restriction de h à la partie localement fermée $U^p = U_p - U_{p+1}$ de U , on a la suite spectrale

$$E_1^{pq} = {}^p\mathcal{H}^{p+q}(\varepsilon_*[h^p]_!\mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow {}^p\mathcal{H}^{p+q}(\varepsilon_*[h]_!\mathbb{Q}_\ell).$$

Par suite, il suffit de vérifier que chaque faisceau pervers en $\mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)]$ -modules gradués $\bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(\varepsilon_*[h^p]_!\mathbb{Q}_\ell)$ est de torsion.

On peut donc supposer dans notre problème initial qu'il existe une sous-tore $T' \subset T$ tel que, quel que soit le point géométrique x de U , la composante neutre du fixateur $T_x \subset \kappa(x) \otimes_k T$ de x est égale à $\kappa(x) \otimes_k T'$.

Choisissons arbitrairement un sous-tore $T'' \subset T$ tel que la flèche produit $T' \times_k T'' \rightarrow T$ est un isomorphisme. On remarque que T'' agit sans point fixe sur U puisque T agit sans point fixe sur U .

Comme $[h] : [U/T] \rightarrow [S/T]$ est alors le produit du T' -torseur universel $S \rightarrow [S/T']$ par le morphisme $[U/T''] \rightarrow [S/T'']$ induit par h , on voit par application de la formule de Künneth que l'on peut supposer en outre dans notre problème initial que $T' = (1)$, c'est-à-dire que T agit sur U avec des stabilisateurs finis.

On a donc un S -schéma de type fini $h : U \rightarrow S$ sur lequel le tore $T = \mathbb{G}_{m,k}^r$ agit sur U avec des stabilisateurs finis. Le S -champ algébrique quotient $[U/T]$ est alors à un morphisme radiciel près un S -champ de Deligne-Mumford. Les morphismes radiciels n'affectant pas la cohomologie étale, on peut supposer que $[U/T]$ est en fait un S -champ de Deligne-Mumford. Il admet alors un recouvrement ouvert pour la topologie étale par des schémas (affines si l'on veut) qui trivialisent le T -torseur $U \rightarrow [U/T]$. Par image inverse sur U , on obtient alors un recouvrement ouvert T -équivariant $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de U pour la topologie

étale et, pour chaque $\alpha \in A$, un morphisme de k -schémas $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow T$ tel que

$$\varphi_\alpha(t \cdot x) = t\varphi_\alpha(x).$$

Pour toute partie B de A on note $U_B = \prod_{\alpha \in B} (U_\alpha/U)$ «l'intersection» des ouverts U_α pour $\alpha \in B$ et $h_B : U_B \rightarrow U \rightarrow S$ le morphisme canonique.

La suite spectrale

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|B|=1-p>0} \mathcal{P}\mathcal{H}^{p+q}(\varepsilon_*[h_B]!\mathbb{Q}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge^{|B|} \mathbb{Z}^B \Rightarrow \mathcal{P}\mathcal{H}^{p+q}(\varepsilon_*[h]!\mathbb{Q}_\ell).$$

pour le recouvrement $([U_\alpha/T])_{\alpha \in A}$ de $[U/T]$ montre qu'il suffit de vérifier que les $\mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)]$ -modules gradués $\bigoplus_n \mathcal{P}\mathcal{H}^n(\varepsilon_*[h_B]!\mathbb{Q}_\ell)$ pour B parcourant l'ensemble des parties de A , sont tous de torsion.

On peut donc supposer dans notre problème initial qu'en plus de toutes les hypothèses déjà formulées, il existe un morphisme de k -schémas $\varphi : U \rightarrow T$ tel que

$$\varphi(t \cdot x) = t\varphi(x).$$

Mais alors le morphisme $[h]$ se factorise en

$$[h] : [U/T] \xrightarrow{[\varphi]} [S \times_k T/T] = S \xrightarrow{[\text{pr}_T]} [S/T]$$

où T agit par translation sur lui-même, où $\text{pr}_T : S \times_k T \rightarrow S$ est la projection canonique et où $[\text{pr}_T]$ est donc le T -torseur universel. Par suite le morphisme de restriction $[h]^* : \varepsilon_*\mathbb{Q}_\ell \rightarrow \varepsilon_*[h]_*\mathbb{Q}_\ell$ se factorise en

$$[h]^* : \varepsilon_*\mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{[\text{pr}_T]^*} \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{[\varphi]^*} \varepsilon_*[h]_*\mathbb{Q}_\ell$$

puisque $\varepsilon \circ [\text{pr}_T]$ est l'identité de S .

Dans le cas particulier où l'on s'est ramené, on a finalement démontré que l'idéal d'augmentation de $\mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)]$ tout entier annule $\bigoplus_n \mathcal{P}\mathcal{H}^n([h]!\mathbb{Q}_\ell)$. \square

On déduit de la proposition l'énoncé suivant qui est une variante du théorème de localisation d'Atiyah-Borel-Segal.

COROLLAIRE A.1.3. *Sous l'hypothèse de pureté, la flèche*

$$\bigoplus_n \mathcal{P}\mathcal{H}^n(f_*^T[j]!\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} \rightarrow \bigoplus_n \mathcal{P}\mathcal{H}^n(f_*^T\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0}$$

ci-dessus est nulle et la flèche de restriction

$$\bigoplus_n \mathcal{P}\mathcal{H}^n(f_*^T\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} \rightarrow \left(\bigoplus_p \mathcal{P}\mathcal{H}^p(g_*\mathbb{Q}_\ell)_{\kappa_0} \right) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell, S} \mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)]$$

est injective.

Démonstration. Une flèche d'un module de torsion dans un module libre sur $\mathbb{Q}_\ell[X^*(T)(-1)]$ est nécessairement nulle. La nullité de la première flèche implique l'injectivité de la seconde d'après la suite exacte longue. \square

A.2. *Cohomologie équivariante de la droite projective pincée.* Soient Y un k -schéma et \mathcal{L} un \mathcal{O}_Y -module inversible. On note $p : P = \mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_Y) \rightarrow Y$ le fibré en droites projectives quotients de $\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_Y$ et on note $\sigma_0 : Y \rightarrow \mathbb{V}(\mathcal{L}) \subset P$ et $\sigma_\infty : Y \xrightarrow{\sim} P - \mathbb{V}(\mathcal{L}) \subset P$ ses sections nulle et infinie.

On fait agir $\mathbb{G}_{m,Y}$ par homothéties sur le fibré en droites $\mathbb{V}(\mathcal{L}) \rightarrow Y$ et on prolonge cette action au fibré projectif $P \rightarrow Y$. On note $[p] : [P/\mathbb{G}_{m,Y}] \rightarrow [Y/\mathbb{G}_{m,Y}] = B(\mathbb{G}_{m,Y}/Y)$ le morphisme de champs algébriques quotient de p par cette action de $\mathbb{G}_{m,Y}$ sur P au-dessus de l'action triviale sur Y . Alors $[p]$ est un fibré en droites projectives et s'écrit sous la forme $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{L}} \oplus \mathcal{O}_{B(\mathbb{G}_{m,Y}/Y)})$ pour $\mathcal{O}_{B(\mathbb{G}_{m,Y}/Y)}$ -module inversible $\tilde{\mathcal{L}}$. On a le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & [P/\mathbb{G}_m] \\ p \downarrow & & \downarrow [p] \\ Y & \longrightarrow & B(\mathbb{G}_{m,Y}/Y) \end{array}$$

On peut aussi faire agir trivialement $\mathbb{G}_{m,Y}$ sur P et Y , et p passe au quotient pour cette action en un morphisme de champs algébriques $B(p) : B(\mathbb{G}_{m,P}/P) \rightarrow B(\mathbb{G}_{m,Y}/Y)$ qui n'est autre que le fibré en droites projectives $\mathbb{P}(\varepsilon_Y^* \mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_{B(\mathbb{G}_{m,Y}/Y)})$ où $\varepsilon_Y : B(\mathbb{G}_{m,Y}/Y) \rightarrow Y$ est le morphisme structural. On a le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightleftharpoons{\quad} & B(\mathbb{G}_{m,P}/P) \\ p \downarrow & & \downarrow B(p) \\ Y & \xrightleftharpoons[\varepsilon_Y]{\quad} & B(\mathbb{G}_{m,Y}/Y) \end{array}$$

LEMME A.2.1. *Soit \mathcal{T} le $\mathcal{O}_{B(\mathbb{G}_{m,Y}/Y)}$ -module inversible universel sur le champ classifiant $B(\mathbb{G}_{m,Y}/Y)$. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{T} \otimes \varepsilon_Y^* \mathcal{L}$$

de $\mathcal{O}_{B(\mathbb{G}_{m,Y}/Y)}$ -modules inversibles.

Compte tenu de ce lemme, on a comme pour tout fibré en droites projectives:

PROPOSITION A.2.2. *Identifions $[p]_* \mathbb{Q}_{\ell,[P/\mathbb{G}_{m,Y}]}$ à*

$$\mathbb{Q}_{\ell,[Y/\mathbb{G}_{m,Y}]} \oplus \mathbb{Q}_{\ell,[Y/\mathbb{G}_{m,Y}]}\{-2\}(-1)$$

par la flèche $1 \oplus c_1(\mathcal{O}_{[P/\mathbb{G}_{m,Y}]}(\sigma_\infty))$.

La somme

$$[p]_* \mathbb{Q}_{\ell, [P/\mathbb{G}_{m,Y}]} \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell, [Y/\mathbb{G}_{m,Y}]} \oplus \mathbb{Q}_{\ell, [Y/\mathbb{G}_{m,Y}]}$$

des flèches de restriction induites par σ_0 et σ_∞ est alors canoniquement isomorphe à la flèche

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\ell, [Y/\mathbb{G}_{m,Y}]} \oplus \mathbb{Q}_{\ell, [Y/\mathbb{G}_{m,Y}]}[-2](-1) &\rightarrow \mathbb{Q}_{\ell, [Y/\mathbb{G}_{m,Y}]} \oplus \mathbb{Q}_{\ell, [Y/\mathbb{G}_{m,Y}]} \\ a \oplus b &\mapsto a \oplus (a + \tilde{c}(b)) \end{aligned}$$

où la classe de Chern $\tilde{c} = c_1(\tilde{\mathcal{L}}) : \mathbb{Q}_{\ell, [Y/\mathbb{G}_{m,Y}]}[-2](-1) \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell, [Y/\mathbb{G}_{m,Y}]}$ de $\tilde{\mathcal{L}}$ est la somme

$$\tilde{c} = t + \varepsilon_Y^*(c)$$

de la classe de Chern $t = c_1(\mathcal{T})$ de \mathcal{T} et de l'image réciproque par ε_Y^* de la classe de Chern $c = c_1(\mathcal{L})$ de \mathcal{L} .

COROLLAIRE A.2.3. La flèche de restriction

$$\varepsilon_{Y,*} [p]_* \mathbb{Q}_{\ell, [P/\mathbb{G}_{m,Y}]} \rightarrow \varepsilon_{Y,*} \mathbb{Q}_{\ell, \mathbb{B}(\mathbb{G}_{m,Y})} \oplus \varepsilon_{Y,*} \mathbb{Q}_{\ell, \mathbb{B}(\mathbb{G}_{m,Y})}$$

induite par σ_0 et σ_∞ est canoniquement isomorphe à la flèche

$$\begin{aligned} \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Q}_{\ell, Y}[-2n](-n) \oplus \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Q}_{\ell, Y}[-2n-2](-n-1) \\ \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Q}_{\ell, Y}[-2n](-n) \oplus \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Q}_{\ell, Y}[-2n](-n) \end{aligned}$$

définie par

$$\bigoplus_n (a_n \oplus b_n) \mapsto \bigoplus_n (a_n \oplus (a_n + b_{n-1} + c_n(b_n)))$$

où $c_n : \mathbb{Q}_{\ell, Y}[-2n-2](-n-1) \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell, Y}[-2n](-n)$ est induit par la première classe de Chern c de \mathcal{L} .

Notons $q : P - (\sigma_0(Y) \cup \sigma_\infty(Y)) \rightarrow Y$ le $\mathbb{G}_{m,Y}$ -torseur complémentaire des sections nulle et infini et $[q] : Y = [P - (\sigma_0(Y) \cup \sigma_\infty(Y)) / \mathbb{G}_{m,Y}] \rightarrow [Y / \mathbb{G}_{m,Y}]$ le quotient de q par l'action de $\mathbb{G}_{m,Y}$ de la structure de toseur. La flèche de restriction ci-dessus s'insère dans le triangle distingué

$$\underbrace{\varepsilon_{Y,*} [q]_* \mathbb{Q}_{\ell, Y}}_A \rightarrow \underbrace{\varepsilon_{Y,*} [p]_* \mathbb{Q}_{\ell, [P/\mathbb{G}_{m,Y}]}}_B \rightarrow \underbrace{\varepsilon_{Y,*} \mathbb{Q}_{\ell, \mathbb{B}(\mathbb{G}_{m,Y})} \oplus \varepsilon_{Y,*} \mathbb{Q}_{\ell, \mathbb{B}(\mathbb{G}_{m,Y})}}_C \rightarrow A[1]$$

dans la catégorie dérivée des faisceaux ℓ -adiques sur Y .

Soient maintenant S un k -schéma, $g : Y \rightarrow S$ un morphisme propre de k -schémas et $p : P = \mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_Y) \rightarrow Y$ un fibré en droites projectives comme précédemment.

On note $\varepsilon_S : B(\mathbb{G}_{m,S}) \rightarrow S$ le morphisme structural et t la première classe de Chern du $\mathcal{O}_{B(\mathbb{G}_{m,S})}$ -module inversible universel, vue comme une section de $\mathcal{H}^2(\varepsilon_{S,*}\mathbb{Q}_{\ell,B(\mathbb{G}_{m,S})})(-1)$. On a l'anneau gradué

$$\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{H}^{2n}(\varepsilon_{S,*}\mathbb{Q}_{\ell,B(\mathbb{G}_{m,S})})(-n) = \mathbb{Q}_{\ell,S}[t]$$

et tous les autres $\mathcal{H}^n(\varepsilon_{S,*}\mathbb{Q}_{\ell,B(\mathbb{G}_{m,S})})$ sont nuls.

La première classe de Chern $c : \mathbb{Q}_{\ell,Y} \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell,Y}[2](1)$ de \mathcal{L} induit une flèche

$$g_*(c) : g_*\mathbb{Q}_{\ell,Y} \rightarrow g_*\mathbb{Q}_{\ell,Y}[2](1)$$

et donc une flèche

$$c_S = \bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^n(g_*(c)) : \bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^n(g_*\mathbb{Q}_{\ell,Y}) \rightarrow \bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^{n+2}(g_*\mathbb{Q}_{\ell,Y})(1).$$

COROLLAIRE A.2.4. *Le triangle distingué*

$$g_*A \rightarrow g_*B \rightarrow g_*C \rightarrow g_*A[1]$$

induit une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^n(g_*B) \rightarrow \bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^n(g_*C) \rightarrow \bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^{n+1}(g_*A) \rightarrow 0$$

en $\mathbb{Q}_{\ell,S}[t]$ -modules gradués en faisceaux pervers ℓ -adiques sur S . De plus, cette suite exacte courte peut être décrite comme suit. Si on note

$$D = \bigoplus_n \mathrm{p}\mathcal{H}^n(g_*\mathbb{Q}_{\ell,Y})$$

gradués par n , et $D[t] = D \otimes_{\mathbb{Q}_{\ell,S}} \mathbb{Q}_{\ell,S}[t]$ avec la graduation diagonale, alors la suite ci-dessus est canoniquement isomorphe à la suite exacte

$$0 \rightarrow D[t] \oplus tD[t] \xrightarrow{\alpha} D[t] \oplus D[t] \xrightarrow{\beta} D \rightarrow 0$$

où les flèches α et β sont données par

$$\alpha : d_0(t) \oplus td_1(t) \mapsto d_0(t) \oplus (d_0(t) + (t + c_S)d_1(t))$$

et

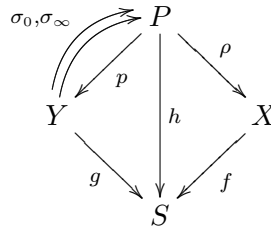
$$\beta : d_0(t) \oplus d_\infty(t) \mapsto d_0(-c_S) - d_\infty(-c_S)$$

où $c_S d(t) = \sum_n c_S(d_n)t^n$ et $d(c_S) = \sum_n c_S^n(d_n)$ pour tout $d(t) = \sum_i d_n t^n \in D[t]$.

Démonstration. La partie $\varepsilon_Y^*(c)$ de \tilde{c} étant une flèche entre cohomologies de degrés différents, elle ne compte pas. □

Comme ci-dessus soient S un schéma, $g : Y \rightarrow S$ un S -schéma propre et $p : P \rightarrow Y$ un fibré en droites projectives, muni des deux sections $\sigma_0, \sigma_\infty : Y \hookrightarrow P$ et de l'action par homothéties de $\mathbb{G}_{m,Y}$.

On considère alors un «pincement $\mathbb{G}_{m,S}$ -équivariant de P le long de ces deux sections», c'est-à-dire un S -schéma $f : X \rightarrow S$ muni d'une action de $\mathbb{G}_{m,S}$, d'un morphisme $\mathbb{G}_{m,S}$ -équivariant de S -schémas $\rho : P \rightarrow X$ qui s'insère dans le diagramme



- ρ est fini,
- ρ induit un isomorphisme de chacune des images de σ_0 et σ_∞ sur le lieu des points fixes $X^{\mathbb{G}_m}$ de \mathbb{G}_m dans X ,
- ρ induit un isomorphisme de $P - (\sigma_0(Y) \cup \sigma_\infty(Y))$ sur $X - X^{\mathbb{G}_m}$.

Notons qu'il s'agit d'un pincement au-dessus de S et non au-dessus de Y de sorte qu'on ne se donne pas *a priori* un morphisme $X \rightarrow Y$.

On se donne plutôt une S -immersion fermée $i : Y \hookrightarrow X$ d'image $X^{\mathbb{G}_m}$ le lieu des points fixes de \mathbb{G}_m agissant sur X . Cette immersion fermée est trivialement \mathbb{G}_m -équivariante. La donnée de i induit la donnée de deux automorphismes ι_0 et ι_∞ de Y tels que les deux carrés

$$\begin{array}{ccc}
 Y \xrightarrow{\sigma_0} P & & Y \xrightarrow{\sigma_\infty} P \\
 \downarrow \iota_0 & \square & \downarrow \rho \\
 Y \xrightarrow{i} X & & Y \xrightarrow{i} X
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 Y \xrightarrow{\sigma_\infty} P & & Y \xrightarrow{\sigma_0} P \\
 \downarrow \iota_\infty & \square & \downarrow \rho \\
 Y \xrightarrow{i} X & & Y \xrightarrow{i} X
 \end{array}$$

soient commutatifs.

On munit en plus les S -schémas Y , P et X d'une action de \mathbb{Z}^I pour un ensemble fini I , qui commutent aux actions de $\mathbb{G}_{m,S}$ et pour laquelle les morphismes f, g, p et i sont équivariants.

On fait alors les hypothèses suivantes sur la cohomologie ℓ -adique:

- l'action de \mathbb{Z}^I sur les faisceaux pervers ℓ -adiques ${}^p\mathcal{H}^n(f_*\mathbb{Q}_{\ell,X})$ et ${}^p\mathcal{H}^n(g_*\mathbb{Q}_{\ell,Y})$ se factorise à travers le quotient $\mathbb{Z}^I \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$,
- l'action de l'automorphisme ι_0 (resp. ι_∞) sur chaque ${}^p\mathcal{H}^n(g_*\mathbb{Q}_{\ell,Y})$ coïncide avec l'action d'un élément e_0 (resp. e_∞) de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$.

PROPOSITION A.2.5. *Soit $\kappa : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$ un caractère tel que $\kappa(e_0) \neq \kappa(e_\infty)$. Alors la flèche de restriction i^* en cohomologie équivariante induit sur la partie κ -isotypique une flèche injective*

$$\begin{aligned} \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_*^{\mathbb{G}_{m,S}} \mathbb{Q}_{\ell,X})_\kappa &\rightarrow \left(\bigoplus_m {}^p\mathcal{H}^m(g_* \mathbb{Q}_{\ell,Y})_\kappa \right) [t] \\ &= \left(\bigoplus_m {}^p\mathcal{H}^m(g_* \mathbb{Q}_{\ell,Y})_\kappa \right) \otimes_{\mathbb{Q}_{\ell,S}} \mathbb{Q}_{\ell,S} [t] \end{aligned}$$

d'image

$$(t + c_S) \left(\bigoplus_m {}^p\mathcal{H}^m(g_* \mathbb{Q}_{\ell,Y})_\kappa \right) [t] \subset \left(\bigoplus_m {}^p\mathcal{H}^m(g_* \mathbb{Q}_{\ell,Y})_\kappa \right) [t]$$

où c_S est la flèche définie avant le corollaire A.2.4.

Démonstration. La flèche d'adjonction $\mathbb{Q}_{\ell,X} \rightarrow \rho_* \mathbb{Q}_{\ell,P}$ induit par restriction au fermé $i : Y \hookrightarrow X$ la flèche

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\ell,Y} = i^* \mathbb{Q}_{\ell,X} &\rightarrow i^* \rho_* \mathbb{Q}_{\ell,P} = i^* \rho_* \sigma_{0,*} \mathbb{Q}_{\ell,Y} \oplus i^* \rho_* \sigma_{\infty,*} \mathbb{Q}_{\ell,Y} \\ &= i^* i_* \iota_{0,*} \mathbb{Q}_{\ell,Y} \oplus i^* i_* \iota_{\infty,*} \mathbb{Q}_{\ell,Y} \\ &= \iota_{0,*} \mathbb{Q}_{\ell,Y} \oplus \iota_{\infty,*} \mathbb{Q}_{\ell,Y} \end{aligned}$$

qui est composée de la diagonale $\mathbb{Q}_{\ell,Y} \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell,Y} \oplus \mathbb{Q}_{\ell,Y}$ et de la somme directe des flèches d'adjonction $\mathbb{Q}_{\ell,Y} \rightarrow \iota_{0,*} \iota_0^* \mathbb{Q}_{\ell,Y} = \iota_{0,*} \mathbb{Q}_{\ell,Y}$ et $\mathbb{Q}_{\ell,Y} \rightarrow \iota_{\infty,*} \iota_\infty^* \mathbb{Q}_{\ell,Y} = \iota_{\infty,*} \mathbb{Q}_{\ell,Y}$. On a donc un morphisme de triangles distingués

$$\begin{array}{ccccccc} f_*^{\mathbb{G}_{m,S}} \mathbb{Q}_{\ell,X} & \longrightarrow & h_*^{\mathbb{G}_{m,S}} \mathbb{Q}_{\ell,P} & \longrightarrow & g_*^{\mathbb{G}_{m,S}} \mathbb{Q}_{\ell,Y} & \longrightarrow & \\ i^* \downarrow & & \sigma_0^* \oplus \sigma_\infty^* \downarrow & & \parallel & & \\ g_*^{\mathbb{G}_{m,S}} \mathbb{Q}_{\ell,Y} & \xrightarrow{u} & g_*^{\mathbb{G}_{m,S}} \mathbb{Q}_{\ell,Y} \oplus g_*^{\mathbb{G}_{m,S}} \mathbb{Q}_{\ell,Y} & \xrightarrow{v} & g_*^{\mathbb{G}_{m,S}} \mathbb{Q}_{\ell,Y} & \longrightarrow & \end{array}$$

où $h = f \circ \rho = g \circ p$, $u = \begin{pmatrix} \iota_0^* \\ \iota_\infty^* \end{pmatrix}$ et $v = (\iota_\infty^*, -\iota_0^*)$, d'où en passant à la cohomologie un diagramme à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u'} & D[t] \oplus tD[t] & \xrightarrow{v'} & D[t] \\ \alpha' \downarrow & & \alpha \downarrow & & \parallel \\ D[t] & \xrightarrow{u} & D[t] \oplus D[t] & \xrightarrow{v} & D[t] \end{array}$$

où on a posé $E = \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(f_*^{\mathbb{G}_{m,S}} \mathbb{Q}_{\ell,X})$ et $D = \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(g_* \mathbb{Q}_{\ell,X})$, où d'après le corollaire précédent, on a $D[t] \oplus tD[t] = \bigoplus_n {}^p\mathcal{H}^n(h_*^{\mathbb{G}_{m,S}} \mathbb{Q}_{\ell,X})$ et on a une formule pour la flèche α qui montre en particulier que α est injective.

Prenons la partie κ de ce diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 E_\kappa & \xrightarrow{u'} & D_\kappa[t] \oplus tD_\kappa[t] & \xrightarrow{v'} & D_\kappa[t] \\
 \alpha' \downarrow & & \alpha \downarrow & & \parallel \\
 D_\kappa[t] & \xrightarrow{u} & D_\kappa[t] \oplus D_\kappa[t] & \xrightarrow{v} & D_\kappa[t].
 \end{array}$$

Par hypothèse, u a maintenant pour composantes les multiplications par $\kappa(e_0)$ et $\kappa(e_\infty)$, c'est-à-dire u est au signe près l'anti-diagonale, et v est donc la flèche $(-\kappa(e_\infty), \kappa(e_0))$, c'est-à-dire au signe près la somme. On en déduit que la flèche composée $v' = v \circ \alpha$ envoie $d_0(t) \oplus d_1(t)$ sur $\pm 2d_0(t)$ et est par conséquent surjective. En considérant la suite exacte longue de cohomologie perverse du triangle distingué de la ligne du haut de diagramme ci-dessus, on obtient que u' est injective. Ceci montre que la flèche de restriction α' de l'énoncé est injective. En outre, son image est l'image réciproque par u de l'image de α , c'est-à-dire

$$\{d(t) \in D_\kappa[t] \mid \kappa(e_0)d(t) - \kappa(e_\infty)d(t) \in (t + c_S)D_\kappa[t]\} = (t + c_S)D_\kappa[t],$$

ce que l'on voulait démontrer. □

A.3. Une formule des points fixes. Soit X un schéma propre sur $k = \mathbb{F}_q$ et G un k -schéma en groupes commutatifs lisse de type fini qui agit sur le k -schéma X . Notons G^0 la composante neutre de G et $\pi_0(G) = G/G^0$ son k -schéma en groupes des composantes connexes. On suppose que le k -schéma en groupes fini étale $\pi_0(G)$ est déployé sur k . Autrement dit on suppose que chaque composante connexe de G admet un point rationnel sur k . On a alors

$$\pi_0(G)(k) = \pi_0(G)(\bar{k}) = G(\bar{k})/G^0(\bar{k})$$

et la suite exacte

$$0 \rightarrow G^0(k) \rightarrow G(k) \rightarrow \pi_0(G)(k) \rightarrow 0.$$

Le théorème de Lang assure que

$$G^0(\bar{k}) = \{\mathcal{L}_q(g) := \text{Frob}_q(g)g^{-1} \mid g \in G(\bar{k})\}.$$

On considère le k -champ algébrique quotient $[X/G]$, la catégorie $[X/G](\bar{k})$ des \bar{k} -points de ce champ et sa catégorie $[X/G](k)$ des k -points. La catégorie $[X/G](\bar{k})$ est la catégorie dont les objets sont les $x \in X(\bar{k})$ et dont les flèches de x vers x' sont les $g \in G(\bar{k})$ tels que $g \cdot x = x'$. La catégorie $[X/G](k)$ a pour objets les couples $(x, g) \in X(\bar{k}) \times G(\bar{k})$ tels que $\text{Frob}_q(x) = g \cdot x$, et pour morphismes de (x, g) dans un autre objet (x', g') les $h \in G(\bar{k})$ tels que $h \cdot x = x'$ et que $\mathcal{L}_q(h)g = g'$.

Le groupe des automorphismes d'un objet x de $[X/G](\bar{k})$ est égal à

$$\text{Aut}(x) = G_x(\bar{k}).$$

Si $(x, g) \in [X/G](k)$, comme G est commutatif le fixateur $G_x \subset G$ de x est stable par $\text{Frob}_q : G \rightarrow G$ et est donc défini sur k ; le groupe des automorphismes de l'objet (x, g) dans $[X/G](k)$ est le groupe fini

$$\text{Aut}(x, g) = \text{Aut}(x)^{\text{Frob}_q} = G_x(k).$$

L'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de la catégorie $[X/G](k)$ est l'ensemble quotient

$$[X/G](k)_{\sharp} = \{(x, g) \in X(\bar{k}) \times G(\bar{k}) \mid \text{Frob}_q(x) = g \cdot x\} / G(\bar{k})$$

où l'action de $h \in G(\bar{k})$ est donnée par $h \cdot (x, g) = (h \cdot x, \mathcal{L}_q(h)g)$. On note aussi $[X/G](k)_{\sharp}$ un système de représentants de ces classes d'isomorphie. On a une application

$$\text{cl} : [X/G](k)_{\sharp} \rightarrow \pi_0(G)(\bar{k}) = \pi_0(G)(k)$$

qui envoie la classe d'isomorphie de (x, g) sur la composante connexe de G contenant g . Cette application est bien définie car $\mathcal{L}_q(h) \in G_0(\bar{k})$ pour tout $h \in G(\bar{k})$.

Le groupe fini $G(k)$ agit sur X et donc sur les groupes de cohomologie ℓ -adique $H^n(\bar{k} \otimes_k X, \mathbb{Q}_{\ell})$, cette dernière action commutant à l'action par transport de structure de $\text{Gal}(\bar{k}/k)$. Pour chaque caractère $\chi : \pi_0(G)(k) \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell}^{\times}$ on peut donc considérer la partie χ -isotypique $H^n(\bar{k} \otimes_k X, \mathbb{Q}_{\ell})_{\chi}$, munie de l'action de l'élément de Frobenius géométrique $\text{Frob}_q \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$.

PROPOSITION A.3.1. *Pour tout caractère $\chi : \pi_0(G)(k) \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell}^{\times}$, on a la formule des points fixes*

$$\sum_n (-1)^n \text{Tr}(\text{Frob}_q, H^n(\bar{k} \otimes_k X, \mathbb{Q}_{\ell})_{\chi}) = |G^0(k)| \sum_{(x,g) \in [X/G](k)_{\sharp}} \frac{\chi(\text{cl}(x, g))}{|\text{Aut}(x, g)|}.$$

Remarque. L'ensemble $[X/G](k)_{\sharp}$ et les cardinaux $|\text{Aut}(x, g)|$ ne dépendent que de la catégorie $[X/G](\bar{k})$ et du foncteur $\text{Frob}_q : [X/G](\bar{k}) \rightarrow [X/G](\bar{k})$.

Pour démontrer cette proposition nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME A.3.2. (i) *Pour tout caractère $\chi : G(k) \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell}^{\times}$, on a*

$$\sum_n (-1)^n \text{Tr}(\text{Frob}_q, H^n(\bar{k} \otimes_k X, \mathbb{Q}_{\ell})_{\chi}) = \frac{1}{|G(k)|} \sum_{g \in G(k)} \chi(g) |X^{\text{Frob}_q \circ g^{-1}}|$$

où

$$X^{\text{Frob}_q \circ g^{-1}} = \{x \in X(\bar{k}) \mid \text{Frob}_q(x) = g \cdot x\}.$$

(ii) *La fonction $g \rightarrow |X^{\text{Frob}_q \circ g^{-1}}|$ est constante sur chacune des composantes connexes de G .*

(iii) *La trace alternée ci-dessus est non nulle seulement si χ se factorise à travers $G(k) \rightarrow \pi_0(G)(k)$ et si c'est le cas on a encore*

$$\sum_n (-1)^n \text{Tr}(\text{Frob}_q, H^n(\bar{k} \otimes_k X, \mathbb{Q}_\ell)_\chi) = \frac{1}{|\pi_0(G)(k)|} \sum_{\gamma \in \pi_0(G)(k)} \chi(\dot{\gamma}) |X^{\text{Frob}_q \circ \dot{\gamma}^{-1}}|$$

où, pour chaque $\gamma \in \pi_0(G)(k)$, $\dot{\gamma} \in G(k)$ est n'importe quel élément de la composante connexe γ .

Démonstration. On a par définition de la partie χ -isotypique

$$\begin{aligned} \sum_n (-1)^n \text{Tr}(\text{Frob}_q, H^n(\bar{k} \otimes_k X, \mathbb{Q}_\ell)_\chi) \\ = \frac{1}{|G(k)|} \sum_{g \in G(k)} \chi(g) \text{Tr}(\text{Frob}_q \circ g^{-1}, H^n(\bar{k} \otimes_k X, \mathbb{Q}_\ell)). \end{aligned}$$

Or g est d'ordre fini puisque $G(k)$ est un groupe fini. On peut donc appliquer la variante due à Deligne et Lusztig de la formule des points fixes de Grothendieck (cf. [De-Lu]) et l'assertion (i) du lemme est démontré.

Pour démontrer l'assertion (ii) il suffit de remarquer que, pour chaque $h \in G(\bar{k})$ tel que $\mathcal{L}_q(h) \in G^0(k)$, on a une bijection

$$X^{\text{Frob}_q \circ g^{-1}} \xrightarrow{\sim} X^{\text{Frob}_q \circ (\mathcal{L}_q(h)g^{-1})}, \quad x \mapsto h \cdot x.$$

D'après le lemme d'homotopie 3.2.3, $G^0(k)$ agit trivialement sur chaque groupe de cohomologie ℓ -adique $H^n(\bar{k} \otimes_k X, \mathbb{Q}_\ell)$. Par suite, la composante χ -isotypique est non nulle seulement si χ est trivial sur $G^0(k) \subset G(k)$, c'est-à-dire se factorise par $G(k) \rightarrow \pi_0(G)(k)$, d'où l'assertion (iii). \square

Démonstration de proposition. Soit $\dot{\gamma} \in G(k)$ dans la composante connexe $\gamma \in \pi_0(G)(k)$. Compte tenu du lemme il s'agit de montrer que

$$|X^{\text{Frob}_q \circ \dot{\gamma}^{-1}}| = \sum_{\substack{(x,g) \in [X/G](k)_\sharp \\ \text{cl}(x,g) = \gamma}} \frac{|G(k)|}{|G_x(k)|}.$$

Or l'application

$$\varphi_{\dot{\gamma}} : X^{\text{Frob}_q \circ \dot{\gamma}^{-1}} \rightarrow \text{cl}^{-1}(\gamma) \subset [X/G](k)_\sharp,$$

qui associe à x la classe d'isomorphie de $(x, \dot{\gamma})$, est surjective puisque, pour tout $(x, g) \in \text{cl}^{-1}(\gamma)$, il existe $h \in G^0(\bar{k})$ tel que $g = \mathcal{L}_q(h)\dot{\gamma}$ et on a

$$(x, g) = h \cdot (h^{-1} \cdot x, \dot{\gamma})$$

où $h^{-1} \cdot x \in X^{\text{Frob}_q \circ \dot{\gamma}^{-1}}$.

Il ne reste donc plus qu'à vérifier que le cardinal de la fibre passant par x de l'application $\varphi_{\dot{\gamma}}$ est précisément $\frac{|G(k)|}{|G_x(k)|}$. Mais cette fibre

$$\{x' \in X^{\text{Frob}_q \circ \dot{\gamma}^{-1}} \mid \exists h \in G(\bar{k}) \text{ tel que } x' = h \cdot x \text{ et } \mathcal{L}_q(h) = 0\}$$

est isomorphe à $G(k)/G_x(k)$, d'où la conclusion. \square

CNRS ET UNIVERSITÉ PARIS-SUD, ORSAY CEDEX, FRANCE

E-mail address: gerard.laumon@math.u-psud.fr

UNIVERSITÉ PARIS-SUD, ORSAY CEDEX, FRANCE

E-mail address: bao-chau.ngo@math.u-psud.fr

BIBLIOGRAPHIE

- [A-I-K] A. ALTMAN, A. IARROBINO, et S. KLEIMAN, Irreducibility of the Compactified Jacobian, dans *Real and Complex Singularities*, Proceedings, Oslo 1976, 1–12, P. Holm (ed.), Sijthoff & Nordhoff, 1977.
- [Al-Kl 1] A. B. ALTMAN et S. L. KLEIMAN, Introduction to Grothendieck duality theory, *Lecture Notes in Math.* **146**, Springer-Verlag, New York (1970).
- [Al-Kl 2] ———, The presentation functor and the compactified Jacobian, dans *The Grothendieck Festschrift*, Volume I, 15–32, Birkhäuser, Basel, 1990.
- [B-B-D] A. A. BEILINSON, J. BERNSTEIN, et P. DELIGNE, Faisceaux pervers, Analyse et topologie sur les espaces singuliers, *Astérisque* **100** (1982).
- [B-N-R] A. BEAUVILLE, M. S. NARASHIMHAN, et S. RAMANAN, Spectral curve and the generalised theta divisor, *J. reine angew. Math.* **398** (1989), 169–179.
- [Del] P. DELIGNE, La conjecture de Weil, II, *Publications Mathématiques de l’I.H.É.S.* **52** (1980), 313–428.
- [De-Lu] P. DELIGNE et G. LUSZTIG, Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. of Math.* **103** (1976), 103–161.
- [Est] E. ESTEVES, Compactifying the relative Jacobian over families of reduced curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), 3045–3095.
- [Fal] G. FALTINGS, Stable G -bundles and projective connections, *J. Alg. Geom.* **2** (1993), 507–568.
- [F-G-S] D. FANTECHI, L. GÖTTSCHE, et D. VAN STRATEN, Euler number of the compactified Jacobian and multiplicity of rational curves, *J. Algebraic Geometry* **8** (1999), 115–133.
- [Gab] O. GABBER, On space filling curves and Albanese varieties, *Geom. Funct. Anal.* **11** (2001), 1192–1200.
- [G-K-M] M. GORESKY, R. KOTTWITZ, et R. MACPHERSON, Homology of affine Springer fibers in the unramified case, <http://arxiv.org/abs/math.RT/0305144> (2003).
- [Hal] T. HALES, A simple definition of the transfer factors for unramified groups, dans *Representation Theory of Groups and Algebras*, *Contemp. Math.* **145** (1993), 109–134.
- [Hit] N. HITCHIN, Stable bundles and integrable systems, *Duke Math. J.* **54** (1987), 91–114.
- [Ka-Lu] D. KAZHDAN et G. LUSZTIG, Fixed point varieties on affine flag manifolds, *Israel J. of Math.* **62** (1988), 129–168.
- [Kot 1] R. E. KOTTWITZ, Stable formula: elliptic singular terms, *Math. Ann.* **275** (1986), 365–399.
- [Kot 2] ———, Transfer factors for Lie algebras, *Represent. Theory* **3** (1999), 127–138.
- [Lan] R. P. LANGLANDS, Les débuts d’une formule des traces stable, *Publications mathématiques de l’Université Paris VII* (1979).

- [La-Sh] R. P. LANGLANDS et D. SHELSTAD, On the definition of the transfer factors, *Math. Ann.* **278** (1987), 219–271.
- [Lau] G. LAUMON, Sur le lemme fondamental pour les groupes unitaires, math.AG/0212245 (2002).
- [La-Ra] G. LAUMON et M. RAPOPORT, A geometric approach to the fundamental lemma for unitary groups, math.AG/9711021 (1997).
- [Ngo] B. C. NGÔ, Fibration de Hitchin et endoscopie, en préparation.
- [Poo] B. POONEN, Bertini theorems over finite fields, math.AG/0204002 (2002).
- [Reg] C. J. REGO, The compactified Jacobian, *Ann. Scient. Èc. Norm. Sup.* **13** (1980), 211–223.
- [Ser] J.-P. SERRE, *Corps Locaux*, Hermann (1968).
- [Wal 1] J.-L. WALDSPURGER, Comparaison d'intégrales orbitales pour des groupes p -adiques, dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994)*, Vol. 1, 807–816, Birkhäuser, 1995.
- [Wal 2] ———, Homogénéité de certaines distributions sur les groupes p -adiques, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **81** (1995), 25–72.
- [Wal 3] ———, Endoscopie et changement de caractéristiques, prépublication, 2004.
- [Wal 4] ———, Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés, *Astérisque* **269** (2001).
- [EGA II] A. GROTHENDIECK, Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné): II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes, *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* **8** (1961).
- [EGA IV] ———, Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné): IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie, *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* **28** (1966).
- [SGA 3] A. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK, Schémas en groupes, Groupes de Type Multiplicatif et Structure des Schémas en Groupes Généraux, *Lecture Notes in Math.* **152** (1970), Springer-Verlag, New York.

(Received October 8, 2004)

(Revised July 12, 2005)