

# Equidistribution de sous-variétés spéciales

Par LAURENT CLOZEL et EMMANUEL ULLMO

## 1. Introduction

Soit  $S$  une variété de Shimura sur  $\mathbb{C}$ . On définit sur  $S$  un ensemble de points spéciaux (les points à multiplication complexe) et un ensemble de sous-variétés spéciales que l'on appelle sous-variétés de type de Hodge. Les définitions qui seront données plus tard dans le texte sont présentées de manière très agréable dans le papier de Moonen [8].

Dans ce cadre André et Oort font la conjecture suivante. Soit  $Y$  une sous-variété de  $S$ , il existe un ensemble fini  $\{S_1, \dots, S_r\}$  de sous-variétés spéciales avec  $S_i \subset Y$  pour tout  $i$  tel que toute variété spéciale  $Z$  de  $S$  contenue dans  $Y$  est en fait contenue dans un des  $S_i$ . Le résultat le plus profond dans la direction de cette conjecture a été obtenu par Edixhoven et Yafaev [5].

On définit dans ce texte une classe assez large de sous-variétés spéciales que nous appellerons fortement spéciales par manque d'une terminologie plus adéquate. Décrivons les sous-variétés fortement spéciales:

Soit  $S$  une variété de Shimura associée à une donnée de Shimura  $(G, X)$  pour un groupe algébrique adjoint sur  $\mathbb{Q}$  et une  $G(\mathbb{R})$ -classe de conjugaison  $X$  de morphismes:

$$h : \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}},$$

où  $\mathbb{S}$  désigne le tore de Deligne  $\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_m$ . Une sous-variété spéciale de  $S$  est associée à un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe algébrique réductif  $H$ . Les sous-variétés fortement spéciales seront celles qui sont associées à un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe algébrique semi-simple  $H_{\mathbb{Q}}$  qui n'est contenu dans aucun  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe parabolique propre de  $G_{\mathbb{Q}}$ . Le résultat principal de ce texte est

**THÉORÈME 1.1.** *Soit  $Y$  une sous-variété d'une variété de Shimura  $S$ . Il existe un ensemble fini  $\{S_1, \dots, S_k\}$  de sous-variétés fortement spéciales de dimension positive  $S_i \subset Y$  tel que si  $Z$  est une sous-variété fortement spéciale de dimension positive avec  $Z \subset Y$  alors  $Z \subset S_i$  pour un certain  $i \in \{1, \dots, k\}$ .*

Le théorème 1.1 se déduit d'un énoncé ergodique. Toute sous-variété spéciale  $Z$  de  $S$  est munie d'une manière canonique d'une mesure de probabilité  $\mu_Z$ .

**THÉORÈME 1.2.** *Soit  $S_n$  une suite de sous-variétés fortement spéciales. Soit  $\mu_n$  la mesure de probabilité associée à  $S_n$ . Il existe une sous-variété fortement spéciale  $Z$  et une sous-suite  $\mu_{n_k}$  qui converge faiblement vers  $\mu_Z$ . De plus  $Z$  contient  $S_{n_k}$  pour tout  $k$  assez grand.*

On obtient la preuve du théorème 1.1 en considérant une suite de sous-variétés fortement spéciales maximales parmi les sous-variétés fortement spéciales  $S_n$  contenues dans  $Y$ . En passant à une sous-suite on peut supposer que  $\mu_n$  converge faiblement vers  $\mu_Z$ . Comme le support de  $\mu_Z$  est contenu dans  $Y$ , on en déduit que  $Z \subset Y$ . Par la maximalité des  $S_n$  et le fait que  $S_n \subset Z$  pour tout  $n$  assez grand, on en déduit que la suite  $S_n$  est stationnaire.

La preuve des résultats principaux de ce texte repose sur des résultats ergodiques. L'outil principal de ce texte est la conjecture de Raghunathan sur les flots unipotents démontrée par Ratner [12], [13] et précisée par Mozes et Shah [10]. Dans la deuxième partie de ce texte nous expliquons, dans le cadre arithmétique qui nous concerne, les résultats ergodiques dont nous avons besoin. La troisième partie repose essentiellement sur la théorie des données de Shimura  $(G, X)$  développée par Deligne [3], [4] interprétant les travaux de Shimura. On y montre les résultats préliminaires à la démonstration des propriétés de stabilité de l'ensemble des sous-variétés fortement spéciales obtenues en début de quatrième partie. Les théorèmes principaux sont alors démontrés à la fin de la quatrième partie. Nous donnons aussi des exemples où le théorème 1.2 est mis en défaut pour des suites de variétés spéciales associées à des groupes  $H_n$  qui ne sont pas semi-simples ou qui sont contenus dans un  $\mathbb{Q}$ -parabolique propre.

*Remerciements.* Les auteurs remercient le rapporteur pour d'utiles commentaires qui ont conduit à une amélioration notable du résultat principal de ce texte.

## 2. Préliminaires sur les groupes

*Notations.* Soit  $H$  un groupe algébrique; conformément à l'usage on notera  $H^0$  la composante connexe de  $H$  pour la topologie de Zariski,  $H^{\text{ad}}$ ,  $H^{\text{der}}$  et  $H^{\text{sc}}$  désignent respectivement le groupe adjoint, le groupe dérivé et le revêtement simplement connexe de  $H^{\text{der}}$ . On notera  $R_u(H)$  le radical unipotent de  $H$ . Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , on notera  $N_G(H)$  le normalisateur dans  $G$  de  $H$  et  $\text{Cent}_G(H)$  ou  $Z_G(H)$  son centralisateur. Si  $H$  est semi-simple connexe

et défini sur un corps  $k$ ,  $H$  est produit presque direct de ses  $k$ -sous-groupes connexes normaux minimaux  $H_1, \dots, H_r$  ([11, prop. 2.4, p. 62]). Si  $H$  est adjoint ou simplement connexe ce produit est direct ([11, p. 62]). Par abus de langage les  $H_i$  seront appelés facteurs  $k$ -simples de  $H$  dans la suite du texte.

Si  $H_1$  est un facteur  $\mathbb{R}$ -simple d'un groupe semi-simple connexe  $H$  sur  $\mathbb{R}$ , on dit que  $H_1$  est compact ou non compact si  $H_1(\mathbb{R})$  est compact ou non compact. On notera dans cette situation  $H(\mathbb{R})^+$  la composante connexe neutre de  $H(\mathbb{R})$  pour la topologie réelle et  $H(\mathbb{R})_+$  la préimage de  $H^{\text{ad}}(\mathbb{R})^+$  par l'application adjointe. Si de plus  $H$  est défini sur  $\mathbb{Q}$ , on note  $H(\mathbb{Q})^+ = H(\mathbb{R})^+ \cap H(\mathbb{Q})$  et  $H(\mathbb{Q})_+ = H(\mathbb{R})_+ \cap H(\mathbb{Q})$ . Si  $A$  est un sous-ensemble d'un espace topologique, on note  $\overline{A}$  son adhérence.

Soient  $G_{\mathbb{Q}}$  un groupe algébrique connexe et semi-simple défini sur  $\mathbb{Q}$  et  $G = G_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+$ . On suppose que les groupes de points réels des facteurs  $\mathbb{Q}$ -simples de  $G_{\mathbb{Q}}$  ne sont pas compacts. Soit  $\Gamma$  un sous-groupe arithmétique de  $G$  et  $\Omega = \Gamma \backslash G$ . On note  $P(\Omega)$  l'ensemble des mesures de Borel de probabilité sur  $\Omega$ .

Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des sous-groupes de Lie fermés connexes  $H$  de  $G$  tels que:

- 1)  $H \cap \Gamma$  est un réseau de  $H$ . En particulier  $\Gamma \backslash \Gamma H$  est fermé et on note  $\mu_H \in P(\Omega)$  sa mesure  $H$ -invariante normalisée.
- 2) Le sous-groupe  $L$  de  $H$  engendré par les sous-groupes unipotents à un paramètre de  $G$  contenus dans  $H$  agit ergodiquement sur  $\Gamma \backslash \Gamma H$  par rapport à  $\mu_H$ .

Pour  $H \in \mathcal{H}$ , on notera  $L(H)$  (ou  $L$  si il n'y a pas de confusion possible) le sous-groupe de  $H$  engendré par les sous-groupes unipotents à un paramètre de  $G$  contenus dans  $H$ .

LEMME 2.1. *Soient  $H \in \mathcal{H}$  et  $L = L(H)$  le sous-groupe associé.*

- a) *Soit  $\overline{\Gamma \backslash \Gamma L}$  l'adhérence de  $\Gamma \backslash \Gamma L$  dans  $\Gamma \backslash G$ . Alors  $\overline{\Gamma \backslash \Gamma L} = \Gamma \backslash \Gamma H$ .*
- b) *Dans cette situation  $H$  est le plus petit sous-groupe de Lie fermé de  $G$  tel que  $\overline{\Gamma \backslash \Gamma L} = \Gamma \backslash \Gamma H$ .*
- c) *Il existe un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe algébrique  $H_{\mathbb{Q}}$  de  $G_{\mathbb{Q}}$  tel que  $H = H_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+$ .*

*Preuve.* Notons tout d'abord que d'après les travaux de Ratner [12], [13], il existe un plus petit sous-groupe de Lie fermé  $H'$  de  $G$  tel que  $L \subset H'$  et  $\overline{\Gamma \backslash \Gamma L} = \Gamma \backslash \Gamma H'$ . D'après [10, prop. 2.1],  $H' \in \mathcal{H}$ .

Par ailleurs  $L$  est un sous-groupe normal de  $H$  et agit ergodiquement sur  $\Gamma \backslash \Gamma H$ . Il existe donc une orbite sous  $L$  qui est dense. Il existe donc  $h \in H$  tel que

$$\Gamma \backslash \Gamma H = \overline{\Gamma \backslash \Gamma h L} = \overline{\Gamma \backslash \Gamma h L h^{-1} h} = \overline{\Gamma \backslash \Gamma L h}.$$

On en déduit que  $\overline{\Gamma\backslash\Gamma L} = \Gamma\backslash\Gamma H$ ; ce qui prouve (a).

Par minimalité de  $H'$ , on a  $H' \subset H$ . D'après [15, prop. 3.2] si  $H_{\mathbb{Q}}$  désigne le plus petit  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe de  $G_{\mathbb{Q}}$  tel que  $L \subset H_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ , on a  $H_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+ = H = H'$ . Ceci prouve donc (b) et (c).

Si  $E$  est un sous-ensemble de  $G$ , on définit le groupe de Mumford-Tate de  $E$ , noté  $MT(E)$ , comme le plus petit  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe algébrique  $H_{\mathbb{Q}}$  de  $G_{\mathbb{Q}}$  tel que  $E \subset H_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ . Si  $H \in \mathcal{H}$  et  $L = L(H)$  alors  $H = MT(L)(\mathbb{R})^+$ . On retiendra le lemme suivant dû à Shah.

LEMME 2.2 (Shah). *Soient  $H \in \mathcal{H}$  et  $L = L(H)$ .*

a) *Le radical  $N$  de  $L$  est unipotent et  $L$  est un produit semi-direct*

$$L = NS$$

*pour un groupe semi-simple sans facteurs compacts  $S$ .*

b) *Le radical de  $MT(L)$  est unipotent.*

*Preuve.* Le (a) est démontré dans [15] Lemme 2.9. Le (b) découle de [15, prop. 3.2] et du fait que  $\Gamma$  est un réseau arithmétique (cf. [15, rem. 3.7]).

LEMME 2.3. *Soit  $H_{\mathbb{Q}}$  un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe algébrique connexe semi-simple de  $G_{\mathbb{Q}}$ . Alors  $H_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+ \in \mathcal{H}$  si et seulement si pour tout facteur  $\mathbb{Q}$ -simple  $H_{1\mathbb{Q}}$  de  $H_{\mathbb{Q}}$ ,  $H_{1\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$  n'est pas compact.*

*Preuve.* Remarquons tout d'abord que par un résultat de Cartan ([11, prop. 7.6]), si  $F$  est un  $\mathbb{R}$ -groupe algébrique simple, simplement connexe et non compact alors  $F(\mathbb{R}) = F(\mathbb{R})^+$  est engendré par ses sous-groupes unipotents à un paramètre. On en déduit que si  $F$  est un  $\mathbb{R}$ -groupe algébrique simple non compact alors  $F(\mathbb{R})^+$  est engendré par ses sous-groupes unipotents à un paramètre.

Supposons que  $H_{\mathbb{Q}}$  est sans facteur  $\mathbb{Q}$ -simple  $\mathbb{R}$ -anisotrope. Soit  $L$  le sous-groupe de  $H_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+$  engendré par ses sous-groupes unipotents à un paramètre. Si  $F$  est un facteur simple non compact de  $H_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+$ , alors par la discussion précédente  $F \subset L$ . On en déduit que  $MT(F) \subset MT(L)$ . On en déduit alors que  $MT(L)$  contient les facteurs  $\mathbb{Q}$ -simples de  $H_{\mathbb{Q}}$  donc  $MT(L) = H_{\mathbb{Q}}$ . D'après les résultats de Ratner ([14, thm. 4, p. 162]), il existe  $H' \in \mathcal{H}$  minimal tel que  $L \subset H'$  et  $\Gamma\backslash\Gamma H'$  soit fermé dans  $\Omega$ . D'après le lemme 2.1 on a  $H' = MT(L)(\mathbb{R})^+ = H_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+ \in \mathcal{H}$ .

Réciproquement soit  $H = H_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+ \in \mathcal{H}$  et  $L = L(H)$ . Si  $H_{\mathbb{Q}}$  a un facteur  $H_1$   $\mathbb{Q}$ -simple qui est  $\mathbb{R}$ -anisotrope, alors on a un morphisme surjectif

$$\Gamma \cap H(\mathbb{R})^+ \backslash H(\mathbb{R})^+ \longrightarrow \Gamma_1 \backslash H'_1(\mathbb{R})^+$$

avec  $H'_1$  isogène à  $H_1$ , l'action de  $L(H)$  à droite étant triviale. L'image  $\Gamma_1$  de  $\Gamma \cap H(\mathbb{R})^+$  est contenu dans un sous-groupe arithmétique ([1, cor. 7.3]) donc est finie. Ceci contredit l'ergodicité de l'action de  $L$ .

2.1. *Mesures algébriques.* Comme  $G$  opère à droite sur  $\Omega$ , on a une opération induite de  $G$  sur  $P(\Omega)$  et pour  $\mu \in P(\Omega)$ , on note  $\mu g$  son transformé par  $g$ . Soit  $\mu \in P(\Omega)$ , on note  $\Lambda(\mu)$  son sous-groupe d'invariance (donc fermé dans  $G$ ):

$$\Lambda(\mu) = \{g \in G \mid \mu g = \mu\}$$

et  $\text{Supp}(\mu)$  son support. On note  $L(\mu)$  le sous-groupe de  $G$  engendré par les sous-groupes unipotents à un paramètre contenus dans  $\Lambda(\mu)$ . On dit qu'une mesure  $\mu \in P(\Omega)$  est algébrique si il existe  $x \in \Omega$  tel que  $\text{Supp}(\mu) = x\Lambda(\mu)$ .

On note  $Q(\Omega)$  l'ensemble des  $\mu \in P(\Omega)$  tels que l'action de  $L(\mu)$  sur  $\Omega$  soit ergodique par rapport à  $\mu$ . D'après les résultats de Ratner toute mesure dans  $Q(\Omega)$  est algébrique et d'après Mozes-Shah [10] pour tout  $\mu \in Q(\Omega)$ , il existe un sous-groupe à un paramètre unipotent  $u(t) \in L(\mu)$  qui agit ergodiquement par rapport à  $\mu$ . Le résultat principal de [10] qui est à la base de ce texte est:

THÉORÈME 2.4 (Mozes-Shah). *Soit  $\mu_i$  une suite de mesures dans  $Q(\Omega)$  convergeant vers  $\mu \in P(\Omega)$ .*

a)  $Q(\Omega)$  est fermé donc  $\mu \in Q(\Omega)$ . Soit  $x \in \text{supp}(\mu)$ .

b) Soit  $u_i(t) \in L(\mu_i)$  un sous-groupe unipotent à un paramètre agissant ergodiquement par rapport à  $\mu_i$ . Soit  $g_i \in G$  une suite convergeant vers  $e$  telle que  $xg_i = x_i \in \text{supp}(\mu_i)$  et telle que  $\{xg_i u_i(t) : t > 0\}$  soit équidistribué par rapport à  $\mu_i$  (une telle suite existe [10, p. 156]). Pour tout  $i$  assez grand, on a

$$\text{supp}(\mu_i) \subset \text{supp}(\mu).g_i$$

et

$$g_i u_i(t) g_i^{-1} \in L(\mu).$$

De plus le sous-groupe de  $L(\mu)$  engendré par les  $g_i u_i(t) g_i^{-1}$  pour  $i$  assez grand agit ergodiquement par rapport à  $\mu$ .

En particulier soit  $Q(\Omega, e)$ , l'ensemble des mesures  $\mu \in Q(\Omega)$  telles que  $\Gamma.e \in \text{supp}(\mu)$ . Les mesures de  $Q(\Omega, e)$  sont les mesures  $H$ -invariantes normalisées de support  $\Gamma \backslash \Gamma H$  pour un  $H \in \mathcal{H}$ . On utilisera aussi la proposition suivante essentiellement contenue dans Mozes-Shah [10]:

PROPOSITION 2.5. *L'ensemble  $Q(\Omega, e)$  est compact pour la topologie faible. Si  $\mu_n \in Q(\Omega, e)$  est une suite qui converge faiblement vers  $\mu \in Q(\Omega, e)$ , alors pour tout  $n$  assez grand  $\text{supp}(\mu_n) \subset \text{supp}(\mu)$ .*

### 3. Sous-variétés spéciales des variétés de Shimura.

3.1. *Préliminaires.* Soit  $\mathbb{S} = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m\mathbb{C}}$  le tore de Deligne, une donnée de Shimura est un couple  $(G_{\mathbb{Q}}, X)$  où  $G_{\mathbb{Q}}$  est un groupe réductif sur  $\mathbb{Q}$  et  $X \subset \text{Hom}(\mathbb{S}, G_{\mathbb{R}})$  est une classe de  $G(\mathbb{R})$ -conjugaison vérifiant les “conditions de Deligne” [3], [4]:

a) Pour tout  $\alpha \in X$  la représentation adjointe  $\text{Lie}(G_{\mathbb{R}})$  est de type

$$\{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\};$$

en particulier  $\alpha(\mathbb{G}_{m\mathbb{R}}) \subset Z(G_{\mathbb{R}})$ .

b) L’involution  $\text{int}(\alpha(\sqrt{-1}))$  est une involution de Cartan du groupe adjoint  $G_{\mathbb{R}}^{\text{ad}}$ .

c) Le groupe  $G_{\mathbb{Q}}^{\text{ad}}$  n’a pas de  $\mathbb{Q}$ -facteur  $\mathbb{R}$ -anisotrope.

On suppose dans la suite de cette section que  $G_{\mathbb{Q}}$  est adjoint. Pour tout  $\alpha \in X$ , le groupe de Mumford-Tate  $MT(\alpha)$  est défini comme le plus petit  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe de  $G_{\mathbb{Q}}$  tel que l’on ait une factorisation de  $\alpha$  via  $MT(\alpha)_{\mathbb{R}}$ . (Noter que ce groupe est donc connexe). Quand  $T = MT(\alpha)$  est un tore, on dit que  $\alpha$  est spécial; comme  $T(\mathbb{R})$  est contenu dans le centralisateur de  $\alpha(\sqrt{-1})$  qui est compact, on en déduit que  $T(\mathbb{R})$  est compact.

*Définition 3.1.* Une sous-donnée de Shimura  $(H_{\mathbb{Q}}, X_H)$  de  $(G_{\mathbb{Q}}, X)$  est une donnée de Shimura telle que  $H_{\mathbb{Q}}$  est un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe algébrique de  $G_{\mathbb{Q}}$  et  $X_H$  la  $H(\mathbb{R})$ -classe de conjugaison d’un morphisme  $\alpha : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ ,  $\alpha \in X$  se factorisant par  $H_{\mathbb{R}}$ .

*PROPOSITION 3.2.* Soit  $H_{\mathbb{Q}}$  un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe algébrique de  $G_{\mathbb{Q}}$  semi-simple connexe et sans  $\mathbb{Q}$ -facteur  $\mathbb{R}$ -anisotrope. On suppose qu’il existe  $\alpha : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ ,  $\alpha \in X$  se factorisant par  $H_{\mathbb{R}}$ . Soit  $X_H$  la  $H(\mathbb{R})$ -classe de conjugaison de  $\alpha$ . Alors  $(H_{\mathbb{Q}}, X_H)$  est une sous-donnée de Shimura de  $(G_{\mathbb{Q}}, X)$ .

Nous vérifions les conditions (a), (b) et (c) des données de Shimura. Soit  $\mathfrak{h} = \text{Lie } H(\mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{g} = \text{Lie } G(\mathbb{R})$ ,  $C = \alpha(\sqrt{-1}) \in H(\mathbb{R})$ ; alors  $C^2$  est central dans  $H(\mathbb{R})$ . La condition (a) découle du fait que  $\mathfrak{h}$  est un sous-espace de  $\mathfrak{g}$  invariant par  $\mathbb{S}$ .

Pour (b),  $H$  étant semi-simple, il nous suffit de vérifier que  $\text{int}(C)$  est une involution de Cartan de  $H_{\mathbb{R}}$ . D’après ([4], 1.1.15), il suffit d’exhiber une représentation réelle  $V$  de  $H(\mathbb{R})$ , fidèle et  $C$ -polarisable au sens suivant: il existe une forme bilinéaire  $B$  sur  $V$ , invariante, telle que  $B(X, CY)$  soit symétrique et définie positive. On prend  $V = \mathfrak{g}$  pour la représentation adjointe et  $B$  égale à la forme de Killing. Enfin (c) est vrai par hypothèse.

3.2. *Sous-variétés de type de Hodge.* On note  $\mathbb{A}$  l'anneau des adèles de  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{A}_f$  l'anneau des adèles finis. Soit  $(G, X)$  une donnée de Shimura ( $G$  n'étant pas nécessairement adjoint) et  $K$  un sous-groupe compact ouvert de  $G(\mathbb{A}_f)$ , on note

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash X \times G(\mathbb{A}_f) / K$$

et  $[x, gK]$  l'image de  $(x, gK) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$  dans  $\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ .

Soit  $X^+$  une composante connexe de  $X$ ;  $X^+$  est une  $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$ -classe de conjugaison d'un morphisme  $h^{\mathrm{ad}} : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$  et  $X^+$  est un domaine symétrique hermitien. Soit  $K_{\infty}$  le fixateur de  $h^{\mathrm{ad}}(\sqrt{-1})$  dans  $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+$ . Soit  $K_{\infty,+}$  la préimage de  $K_{\infty}$  par l'application adjointe, on a alors un isomorphisme

$$(1) \quad X^+ \simeq G(\mathbb{R})_+ / K_{\infty,+} \simeq G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{R})^+ / K_{\infty}.$$

et

$$(2) \quad \mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})_+ \backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f) / K.$$

On note encore  $[x, gK]$  l'image de  $(x, gK) \in X^+ \times G(\mathbb{A}_f)$  dans  $\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ .

Nous aurons besoin de la définition des opérateurs de Hecke dans ce cadre (voir par exemple [9, 1.6.1]).

*Définition 3.3.* Soient  $g \in G(\mathbb{A}_f)$  et  $K_g = K \cap gKg^{-1}$ . La correspondance de Hecke  $T_g$  sur  $\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$  est définie par le diagramme

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) \xleftarrow{\pi_1} \mathrm{Sh}_{K_g}(G, X)(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi_2} \mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}).$$

où  $\pi_1$  est donné par l'inclusion  $K_g \subset K$  et  $\pi_2$  est l'application

$$[x, \theta] \rightarrow [x, \theta g].$$

Soit  $Z$  une sous-variété de  $\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ , on note  $T_g \cdot Z$  le cycle  $\pi_{2*} \pi_1^* Z$  de  $\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ . On dit que  $T_g \cdot Z$  est le translaté de  $Z$  par l'opérateur de Hecke  $T_g$ .

Soit  $R_{G,K}$  un système de représentants de  $G(\mathbb{Q})_+ \backslash G(\mathbb{A}_f) / K$ , alors  $R_{G,K}$  est fini et

$$(3) \quad \mathrm{Sh}_K(G, X) = \cup_{g \in R_{G,K}} \Gamma_g \backslash X^+$$

où

$$\Gamma_g = G(\mathbb{Q})_+ \cap gKg^{-1}.$$

Si  $\Gamma'_g$  désigne l'image par l'application adjointe de  $\Gamma_g$  on a un isomorphisme

$$\Gamma'_g \backslash X^+ = \Gamma_g \backslash X^+$$

où les groupes  $\Gamma_g$  et  $\Gamma'_g$  agissent de manière naturelle via les isomorphismes de l'équation (1).

On suppose dans la suite de cette section que  $G = G^{\text{ad}}$  est un groupe adjoint donc que  $X^+$  est une  $G(\mathbb{R})^+$  classe de conjugaison de morphismes de

$$\mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$$

et  $\Gamma_g = G(\mathbb{Q})^+ \cap gKg^{-1}$ .

Soit  $(H, X_H)$  une sous-donnée de Shimura. Si  $K_H = K \cap H(\mathbb{A}_f)$ , on dispose d'un morphisme induit de variétés de Shimura

$$\psi : \text{Sh}_{K_H}(H, X_H)(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}).$$

On choisit alors un système de représentant  $R_{H,K}$  de

$$H(\mathbb{Q})_+ \backslash H(\mathbb{A}_f) / K_H;$$

on a donc

$$\text{Sh}_{K_H}(H, X_H)(\mathbb{C}) = \cup_{\lambda \in R_{H,K}} \Delta_{\lambda} \backslash X_H^+$$

avec  $\Delta_{\lambda} = H(\mathbb{Q})_+ \cap \lambda K_H \lambda^{-1}$ .

*Définition 3.4.* Avec les notations précédentes, une sous-variété de la forme  $\psi(\Delta_{\lambda} \backslash X_H^+)$  est appelée *sous-variété de type Shimura* de  $\text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ . Une composante irréductible d'un translaté par un opérateur de Hecke d'une *sous-variété de type Shimura* de  $\text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$  est appelée *sous-variété de type de Hodge*.

Le but de cette partie est de décrire les sous-variétés de type de Hodge dans le langage des espaces localement symétriques hermitiens. Le lemme suivant qui montre la faible différence entre les notions de sous-variété de type Shimura et sous-variété de type de Hodge nous permettra de nous ramener toujours dans la suite à des sous-variétés de type Shimura.

**LEMME 3.5.** *Soit  $M$  une sous-variété de type de Hodge de  $\text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ . Il existe  $\beta \in R_{G,K}$  et une sous-variété de type Shimura  $M_1$  tels que  $M$  est une composante irréductible de  $T_{\beta} \cdot M_1$ .*

*Preuve.* Il existe une sous-donnée de Shimura  $(H, X_H)$  et  $\lambda \in G(\mathbb{A}_f)$  tels que  $M$  est l'image de  $X_H \times \lambda K$  dans  $\text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ . On peut écrire  $\lambda = \gamma \beta k$  avec  $\gamma \in G(\mathbb{Q})_+$ ,  $\beta \in R_{G,K}$  et  $k \in K$ . Soient  $H_{\gamma} = \gamma^{-1} H \gamma$  et  $X_{\gamma}$  la  $H_{\gamma}(\mathbb{R})$ -classe de conjugaison de  $\gamma^{-1} \cdot x_0$  pour un  $x_0 \in X_H$ ,  $(H_{\gamma}, X_{\gamma})$  est une sous-donnée de Shimura et  $M$  est aussi l'image de  $X_{\gamma} \times \beta K$  dans  $\text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ . On en déduit que  $M$  est une composante irréductible de

$$T_{\beta} \cdot \text{Sh}_{K \cap H_{\gamma}(\mathbb{A}_f)}(H_{\gamma}, X_{\gamma})(\mathbb{C}).$$

**LEMME 3.6.** *Pour  $\lambda \in R_{H,K}$ , il existe un unique  $\beta \in R_{G,K}$  tel que  $\lambda = \gamma \beta k$  avec  $\gamma \in G(\mathbb{Q})^+$  et  $k \in K$ . On a alors*

$$\psi(\Delta_{\lambda} \backslash X_H^+) \subset \Gamma_{\beta} \backslash X^+.$$



*Preuve.* On a pour tout  $x \in X_H^+$

$$\psi([x, \lambda K_H]) = [x, \lambda K] = [x, \gamma \beta K] = [\gamma^{-1}x, \beta K].$$

Ceci termine la preuve quand on a remarqué que les éléments de  $\Delta_\lambda \backslash X_H^+$  sont ceux de la forme  $[y, \lambda K_H]$  ( $y \in X_H^+$ ) et ceux de  $\Gamma_\beta \backslash X^+$  sont ceux de la forme  $[y, \beta K]$  avec  $y \in X^+$ .

Fixons  $x_0 \in X_H^+$  de sorte que

$$X_H^+ = H(\mathbb{R})_+ . x_0 \subset X^+ = G(\mathbb{R})^+ . x_0.$$

Soient  $x_1 = \gamma^{-1} . x_0 \in X$  et  $H_\gamma = \gamma^{-1} H \gamma$ . On a  $H_\gamma(\mathbb{R}) = \gamma^{-1} H(\mathbb{R}) \gamma$  et on note

$$X_{H_\gamma} = H_\gamma(\mathbb{R}) . x_1$$

la  $H_\gamma(\mathbb{R})$ -classe de conjugaison de  $x_1$  alors

$$X_{H_\gamma}^+ = H_\gamma(\mathbb{R})_+ . x_1$$

est une composante connexe de  $X_{H_\gamma}$ .

On note  $\psi_\lambda$  l'inclusion naturelle

$$\psi_\lambda : X_{H_\gamma}^+ \longrightarrow X^+.$$

LEMME 3.7. a) L'application  $\psi_\lambda$  induit par passage au quotient une application (encore notée  $\psi_\lambda$ )

$$\psi_\lambda : \gamma^{-1} \Delta_\lambda \gamma \backslash X_{H_\gamma}^+ \longrightarrow \Gamma_\beta \backslash X^+,$$

et

$$\psi_\lambda(\gamma^{-1} \Delta_\lambda \gamma \backslash X_{H_\gamma}^+) = \psi(\Delta_\lambda \backslash X_H^+).$$

b) On a  $\gamma^{-1} \Delta_\lambda \gamma \subset \Gamma_\beta$  et

$$\gamma^{-1} \Delta_\lambda \gamma = H_\gamma(\mathbb{Q})_+ \cap \Gamma_\beta = H_\gamma(\mathbb{R})_+ \cap \Gamma_\beta.$$

*Preuve.* Comme  $\gamma^{-1} \lambda = \beta k$ , on a

$$\gamma^{-1} \Delta_\lambda \gamma = H_\gamma(\mathbb{Q})_+ \cap \beta k K_H \beta^{-1} \subset \Gamma_\beta.$$

Ceci prouve à la fois la première partie du (a) et du (b). Par ailleurs d'après la preuve du lemme 3.6

$$\psi(\Delta_\lambda \backslash X_H^+) = \{[\gamma^{-1} h . x_0, \beta K], \quad h \in H(\mathbb{R})_+\}$$

d'où

$$\psi(\Delta_\lambda \backslash X_H^+) = \{[h . x_1, \beta K], \quad h' \in H_\gamma(\mathbb{R})_+\} = \psi_\lambda(\gamma^{-1} \Delta_\lambda \gamma \backslash X_{H_\gamma}^+).$$

Comme  $\Gamma_\beta \subset G(\mathbb{Q})$ , on a

$$H_\gamma(\mathbb{Q})_+ \cap \Gamma_\beta = H_\gamma(\mathbb{R})_+ \cap \Gamma_\beta,$$

$$(4) \quad \gamma^{-1}\Delta_\lambda\gamma = H_\gamma(\mathbb{Q})_+ \cap \beta k K_H k^{-1} \beta^{-1}$$

et

$$H_\gamma(\mathbb{Q})_+ \cap \Gamma_\beta = H_\gamma(\mathbb{Q})_+ \cap \beta K \beta^{-1}.$$

Un élément  $\theta \in H_\gamma(\mathbb{Q})_+ \cap \Gamma_\beta$  peut donc s'écrire

$$\theta = \beta k_1 \beta^{-1} = \gamma^{-1} h \gamma$$

avec  $k_1 \in K$  et  $h \in H(\mathbb{Q})_+$ . On a donc

$$k^{-1} k_1 k = \lambda^{-1} h \lambda \in H(\mathbb{A}_f) \cap K = K_H$$

et  $\theta \in H_\gamma(\mathbb{Q})_+ \cap \beta k K_H k^{-1} \beta^{-1}$ . Ceci termine la démonstration du lemme au vu de l'équation (4).

Résumons l'information qui nous sera utile dans la suite sous la forme:

**PROPOSITION 3.8.** *On suppose toujours que  $G_\mathbb{Q}$  est adjoint et on fixe  $\beta \in R_{G,K}$ . On pose  $\Gamma = \Gamma_\beta$  de sorte que  $S_0 = \Gamma \backslash X^+$  est une composante irréductible de  $\text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ .*

*Soit  $M$  une sous-variété de type Shimura de  $S_0$ , alors  $M$  est l'image dans  $S_0$  d'une variété  $M' = \Delta_H \backslash X_H^+$  où  $H_\mathbb{Q}$  est un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe de  $G_\mathbb{Q}$  tel que :*

- 1)  $\Delta_H = H(\mathbb{R})_+ \cap \Gamma$  est un réseau arithmétique de  $H(\mathbb{R})_+$ .
- 2) Il existe un sous-groupe compact maximal  $K_\infty$  de  $G(\mathbb{R})^+$  tel que  $K_\infty \cap H(\mathbb{R})_+$  est un compact maximal de  $H(\mathbb{R})_+$  et

$$X_H^+ \simeq H(\mathbb{R})_+ / K_\infty \cap H(\mathbb{R})_+.$$

On a aussi une réciproque utile à cette proposition:

**PROPOSITION 3.9.** *Soit  $H_\mathbb{Q}$  un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe réductif vérifiant les deux propriétés de la proposition 3.8 avec  $K_\infty = \text{Cent}(\alpha(\sqrt{-1}))$  pour un  $\alpha \in X$  tel que  $MT(\alpha) \subset H_\mathbb{Q}$  soit un tore, alors l'image  $M$  de  $\Delta_H \backslash X_H^+$  dans  $S_0$  est une sous-variété de type de Hodge.*

*Preuve.* La sous-variété  $M$  est totalement géodésique dans  $S_0$  et contient un point spécial; par les résultats de Moonen ([8, thm. 4.3]), c'est une sous-variété de type de Hodge.

#### 4. Preuve des théorèmes

4.1. *Sous-variétés fortement spéciales.* Soient  $(G, X)$  une donnée de Shimura avec  $G$  adjoint,  $K$  un sous groupe compact ouvert de  $G(\mathbb{A}_f)$  et  $S = \text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ . Une sous-variété fortement spéciale est une composante irréductible d'un translaté par un opérateur de Hecke d'une sous-variété de Shimura  $\text{Sh}_{K \cap H'(\mathbb{A}_f)}(H', X_{H'}) (\mathbb{C})$  où

a)  $H'$  est semi-simple.

b)  $H'$  n'est pas contenu dans un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe parabolique propre de  $G_{\mathbb{Q}}$ .

D'après [6, lemme 5.1], la condition (b) est équivalente aux conditions (b') ou (b'') suivantes:

b') Tout  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe algébrique de  $G_{\mathbb{Q}}$  contenant  $H_{\mathbb{Q}}$  est réductif.

b'') Le centralisateur  $Z_G(H)$  de  $H_{\mathbb{Q}}$  dans  $G_{\mathbb{Q}}$  est  $\mathbb{Q}$ -anisotrope.

Plus généralement si on ne suppose plus  $G$  adjoint, soient  $(G, X)$  une donnée de Shimura et  $K \subset G(\mathbb{A}_f)$  un sous-groupe compact ouvert. Soit  $(G^{\text{ad}}, X^{\text{ad}})$  la donnée de Shimura adjointe ([9, 1.6.7]). Soit  $K^{\text{ad}}$  un sous-groupe compact ouvert contenant l'image par l'application adjointe de  $K$ ; le morphisme induit de  $S = \text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$  vers  $S^{\text{ad}} = \text{Sh}_{K^{\text{ad}}}(G^{\text{ad}}, X^{\text{ad}})(\mathbb{C})$  est fini et d'après [5, prop. 2.2], une sous-variété  $Z$  de  $S$  est de type de Hodge si et seulement si son image  $Z^{\text{ad}}$  dans  $S^{\text{ad}}$  l'est. On dit alors que  $Z$  est fortement spécial si  $Z^{\text{ad}}$  l'est.

On suppose de nouveau  $G$  adjoint. On fixe encore  $\beta \in R_{G,K}$ . On pose  $\Gamma = \Gamma_{\beta}$  et  $S_0 = \Gamma \backslash X^+$ . On rappelle que l'on a pu définir avec les mêmes notations dans la section 2 un ensemble de sous-groupes de Lie connexes de  $G(\mathbb{R})^+$  noté  $\mathcal{H}$ . Si  $\Omega = \Gamma \backslash G(\mathbb{R})^+$ , on a aussi défini des ensembles de mesures de probabilités

$$Q(\Omega, e) \subset Q(\Omega) \subset P(\Omega).$$

D'après la proposition 3.8, une sous-variété fortement spéciale de  $S_0$  associée à une sous-donnée de Shimura  $(H', X_{H'})$  de  $(G, X)$  est (à translation par un opérateur de Hecke près) l'image d'une variété de la forme  $\Delta_H \backslash X_H^+$  vérifiant les conditions de la proposition 3.8 pour un groupe  $H_{\mathbb{Q}}$  qui est un conjugué de  $H'_{\mathbb{Q}}$  par un élément de  $G(\mathbb{Q})$ . On en déduit que  $H$  vérifie les mêmes propriétés a) et b) que  $H'$ . Par abus de notation, on écrira souvent  $\Delta_H \backslash X_H^+$  pour son image dans  $S_0$ .

*Remarque 4.1.* Le sous-groupe  $H_{\mathbb{Q}}$ , associé à une sous-variété spéciale  $M = \Delta_H \backslash X_H^+$  n'est bien défini qu'à conjugaison près par un  $\lambda \in \Gamma$ . Si  $X_H^+ = H(\mathbb{R})_+ \cdot x_0$  pour un  $x_0 \in X_H$ , on note  $H_{\lambda} = \lambda H_{\mathbb{Q}} \lambda^{-1}$ ,  $x_1 = \lambda \cdot x_0$ ,  $X_{H_{\lambda}}^+$  la  $H_{\lambda}(\mathbb{R})_+$ -classe de conjugaison de  $x_1$  et  $\Delta_{H_{\lambda}} = \Gamma \cap H_{\lambda}(\mathbb{R})_+$ . Alors  $H_{\lambda}$  a les mêmes propriétés que  $H$  et  $M$  est aussi l'image de  $\Delta_{H_{\lambda}} \backslash X_{H_{\lambda}}^+$ .

Par ailleurs d'après le lemme 2.3 et la condition c) de Deligne pour les variétés de Shimura (rappelé au début de la section 3.1), on a  $H(\mathbb{R})^+ \in \mathcal{H}$ .

Soit  $M = \Delta_H \backslash X_H^+$  une sous-variété fortement spéciale de type Shimura. Soit  $\alpha \in X^+$  se factorisant par  $H_{\mathbb{R}}$ . S'il existe un sous-groupe de Lie connexe  $F \in \mathcal{H}$  tel que  $H_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+ \subset F$ , on sait (d'après le lemme 2.1) qu'il existe un

$\mathbb{Q}$ -sous-groupe  $H'_\mathbb{Q}$  tel que  $F = H'(\mathbb{R})^+$ . D'après la propriété (b) des sous-variétés fortement spéciales,  $H'_\mathbb{Q}$  est réductif (sinon  $H'_\mathbb{Q}$  donc  $H_\mathbb{Q}$  serait contenu dans un  $\mathbb{Q}$ -parabolique propre). Soit  $X_{H'}^+$  la  $H'(\mathbb{R})_+$ -classe de conjugaison de  $\alpha$  et  $\Delta_{H'} = \Gamma \cap H'(\mathbb{R})_+$ .

LEMME 4.2. *La sous-variété  $M' = \Delta_{H'} \backslash X_{H'}^+$ , est fortement spéciale et*

$$M \subset M'.$$

*Preuve.* On a vu que  $H'_\mathbb{Q}$  est réductif. Comme  $H'_\mathbb{Q}(\mathbb{R})^+ \in \mathcal{H}$ , on sait d'après les lemmes 2.2 et 2.3 que  $H'_\mathbb{Q}$  est semi-simple sans  $\mathbb{Q}$ -facteur simple compact. D'après la proposition 3.2,  $(H', X_{H'})$  est une sous-donnée de Shimura, on en déduit par la proposition 3.9 que  $M'$  est une sous-variété de type de Hodge. L'assertion  $M \subset M'$  est claire.

On rappelle que pour tout  $F \in \mathcal{H}$  on dispose d'une mesure de probabilité associée  $\mu_F$  sur  $Z_F = \Gamma \backslash \Gamma F \simeq \Gamma \cap F \backslash F$ . En particulier si  $M = \Delta_H \backslash X_H^+$  est une sous-variété fortement spéciale de type Shimura, comme  $H_\mathbb{Q}(\mathbb{R})^+ \in \mathcal{H}$ , on dispose d'une mesure de probabilité  $\mu_H = \mu_{H(\mathbb{R})^+}$  sur

$$Z_H = Z_{H(\mathbb{R})^+} = H(\mathbb{R})^+ \cap \Gamma \backslash H(\mathbb{R})^+.$$

Par ailleurs soit  $\alpha \in X^+$  tel que  $T = MT(\alpha) \subset H_\mathbb{Q}$  est un tore. Alors  $K_\infty = \text{Cent}(\alpha(\sqrt{-1}))$  est un compact maximal de  $G(\mathbb{R})^+$ ,

$$K_\infty \cap H(\mathbb{R})_+$$

est un compact maximal de  $H(\mathbb{R})_+$  et

$$X_H^+ = H(\mathbb{R})_+ / K_\infty \cap H(\mathbb{R})_+.$$

Alors  $K_\infty \cap H(\mathbb{R})^+$  est un compact maximal de  $H(\mathbb{R})^+$  et comme  $K_\infty$  agit transitivement sur  $H(\mathbb{R})_+ / H(\mathbb{R})^+$  on dispose d'un isomorphisme

$$H(\mathbb{R})^+ / K_\infty \cap H(\mathbb{R})^+ \longrightarrow X_H^+.$$

On en déduit en composant les applications naturelles

$$Z_H = H(\mathbb{R})^+ \cap \Gamma \backslash H(\mathbb{R})^+ \longrightarrow H(\mathbb{R})^+ \cap \Gamma \backslash X_H^+$$

et

$$H(\mathbb{R})^+ \cap \Gamma \backslash X_H^+ \longrightarrow M = H(\mathbb{R})_+ \cap \Gamma \backslash X_H^+$$

une application  $\pi_{H,\alpha} : Z_H \longrightarrow M$ . Par ailleurs comme  $M$  est un espace localement symétrique hermitien, on dispose sur  $M$  d'une métrique kählerienne et d'une mesure de probabilité associée  $\mu_M$ . On a alors

$$(5) \quad (\pi_{H,\alpha})_* \mu_H = \mu_M.$$

On remarque que  $\pi_{H,\alpha}$  est la restriction à  $Z_H$  de l'application

$$(6) \quad \begin{aligned} \pi_\alpha : \Gamma \backslash G(\mathbb{R})^+ &\longrightarrow \Gamma \backslash X^+ \\ \Gamma g &\longrightarrow \Gamma g.\alpha. \end{aligned}$$

Plus généralement pour tout  $\beta \in X_H^+$ , on a  $\pi_\beta(Z_H) = M$  et  $\pi_{\beta*}\mu_H = \mu_M$ .

4.2. *Sous-variétés fortement spéciales et retour vers les compacts.* Nous gardons les notations de la partie précédente. La proposition suivante est une forme faible d'un résultat dû à Dani et Margulis ([2, thm. 2])

PROPOSITION 4.3. *Il existe un ensemble compact  $C$  de  $\Gamma \backslash G(\mathbb{R})^+$  tel que pour tout sous-groupe unipotent à un paramètre  $W = (u_t)_{t \in \mathbb{R}}$  et tout  $g \in G(\mathbb{R})^+$ , si*

$$\Gamma \backslash \Gamma g W \cap C = \emptyset$$

*alors il existe un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe parabolique propre  $P$  de  $G_{\mathbb{Q}}$  tel que*

$$g W g^{-1} \subset P(\mathbb{R}).$$

On en déduit tout d'abord:

LEMME 4.4. *Soient  $F_{\mathbb{Q}}$  un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe semi-simple tel que  $F(\mathbb{R})^+ \in \mathcal{H}$  et  $g \in G^+(\mathbb{Q})$  tels que*

$$\Gamma \backslash \Gamma g F(\mathbb{R})^+ \cap C = \emptyset.$$

*Il existe alors un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe parabolique propre  $P$  de  $G_{\mathbb{Q}}$  tel que  $F_{\mathbb{Q}} \subset P$ .*

*Preuve.* Soit  $L = L(F)$  le sous-groupe de  $F(\mathbb{R})^+$  engendré par les sous-groupes unipotents à un paramètre de  $G(\mathbb{R})^+$  qui sont contenus dans  $F(\mathbb{R})^+$ . On a alors  $F_{\mathbb{Q}} = MT(L)$  (voir la discussion après le lemme 2.1). Fixons un sous-groupe à un paramètre

$$W = (u_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset L$$

tel que  $W$  n'est contenu dans aucun sous-groupe normal de  $L(F)$ .

Pour tout  $h \in F(\mathbb{R})^+$ ,

$$\Gamma \backslash \Gamma g h W \cap C \subset \Gamma \backslash \Gamma g F(\mathbb{R})^+ \cap C = \emptyset.$$

D'après la proposition 4.3, pour tout  $h \in F(\mathbb{R})^+$ , il existe un  $\mathbb{Q}$ -parabolique propre  $P_h$  tel que

$$g h W h^{-1} g^{-1} \subset P_h(\mathbb{R}).$$

Comme l'ensemble des paraboliens sur  $\mathbb{Q}$  est dénombrable, il existe un  $\mathbb{Q}$ -parabolique propre  $P_0$  et un ensemble  $A \subset F(\mathbb{R})^+$  de mesure positive (pour la mesure de Haar sur  $F(\mathbb{R})^+$ ) tel que pour tout  $h \in A$ :

$$g h W h^{-1} g^{-1} \subset P_0(\mathbb{R}).$$

Comme l'ensemble des  $h \in F(\mathbb{R})^+$  tels que  $ghWh^{-1}g^{-1} \subset P_0(\mathbb{R})$  est un sous-ensemble de Zariski de  $F(\mathbb{R})^+$  de mesure positive, par connexité de  $F(\mathbb{R})^+$  on en déduit que pour tout  $h \in F(\mathbb{R})^+$ ,

$$ghWh^{-1}g^{-1} \subset P_{0\mathbb{R}}.$$

Comme  $W$  n'est contenu dans aucun sous-groupe normal de  $L$  on en déduit que

$$gLg^{-1} \subset P_{0\mathbb{R}}.$$

Soit  $P = g^{-1}P_0g$ , on a  $L \subset P_{\mathbb{R}}$  donc

$$F_{\mathbb{Q}} = MT(L) \subset P.$$

Ceci termine la preuve du lemme car  $P$  est un  $\mathbb{Q}$ -parabolique propre.

LEMME 4.5. *Il existe un compact  $C'$  de  $\Gamma \backslash X^+$  tel que si  $\Delta_F \backslash X_F^+$  est une sous-variété fortement spéciale de type Shimura alors*

$$(7) \quad \Delta_F \backslash X_F^+ \cap C' \neq \emptyset.$$

*Preuve.* Soit  $\Omega$  un compact de  $G(\mathbb{R})^+$  contenant l'origine  $e$  comme point intérieur. On note

$$C_1 = C.\Omega = \{c\omega, c \in C, \omega \in \Omega\},$$

c'est encore un compact de  $\Gamma \backslash G(\mathbb{R})^+$ . Pour tout  $x \in X^+$ , on note comme précédemment  $\pi_x$  l'application associée de  $\Gamma \backslash G(\mathbb{R})^+$  vers  $\Gamma \backslash X^+$ . On fixe  $x_0 \in X^+$  et on note  $C' = \pi_{x_0}(C_1)$ . On remarque que pour tout  $\omega \in \Omega$ , si on note  $x_\omega = \omega.x_0$  alors

$$\pi_{x_\omega}(C) \subset C'.$$

Soit  $x \in X_F^+$  de sorte que  $X_F^+ = F(\mathbb{R})_+.x$ . Comme  $G(\mathbb{Q})^+$  est dense dans  $G(\mathbb{R})^+$ , il existe  $\omega \in \Omega$  et  $\gamma \in G(\mathbb{Q})^+$  tels que  $x = \gamma\omega.x_0$ . Soit  $F_{\gamma\mathbb{Q}} = \gamma^{-1}F_{\mathbb{Q}}\gamma$ . On a alors  $X_F^+ = F(\mathbb{R})_{+\gamma}.x_\omega$  et

$$\Delta_F \backslash X_F^+ = \pi_{x_\omega}(\Gamma \backslash \Gamma\gamma F_\gamma(\mathbb{R})_+).$$

Si  $\Delta_F \backslash X_F^+ \cap C' = \emptyset$  alors *a fortiori*  $\Delta_F \backslash X_F^+ \cap \pi_{x_\omega}(C) = \emptyset$  et finalement

$$\Gamma \backslash \Gamma\gamma F_\gamma(\mathbb{R})_+ \cap C = \emptyset.$$

Par le lemme 4.4, on en déduit que  $F_{\gamma\mathbb{Q}} \subset P$  pour un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe parabolique propre  $P$ . Ceci est impossible par la propriété (b) des sous-variétés fortement spéciales.

4.3. *Preuve du théorème.* On dispose de tous les outils pour démontrer le résultat principal de ce texte:

THÉORÈME 4.6. *Soient  $(G, X)$  une donnée de Shimura,  $K \subset G(\mathbb{A}_f)$  un sous-groupe compact ouvert et  $S = \Gamma \backslash X^+$  une composante irréductible de  $\text{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$  pour un  $\Gamma = \Gamma_\beta$ ,  $\beta \in R_{G,K}$ . Soit  $S_n$  une suite de sous-variétés fortement spéciales de  $S$ . Soit  $\mu_n$  la mesure de probabilité associée à  $S_n$ . Il existe une sous-variété fortement spéciale  $M$  et une sous-suite  $\mu_{n_k}$  qui converge faiblement vers la mesure  $\mu_M$  canoniquement associée à  $M$ . De plus  $M$  contient  $S_{n_k}$  pour tout  $k$  assez grand.*

Remarque 4.7. Sans la condition (a) des sous-variétés fortement spéciales le théorème peut être mis en défaut, par exemple pour des suites de tores  $H_n$  définissant des points CM. De même si (b) n'est pas vérifié pour un groupe  $H_{\mathbb{Q}}$ , on peut d'après la condition équivalente (b'') trouver une suite  $z_n \in Z_G(H)$  telle que l'image de  $z_n$  dans  $\Gamma \cap Z_G(H) \backslash Z_G(H)(\mathbb{R})$  n'a pas de sous-suite convergente. Soit  $\alpha : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$  se factorisant par  $H_{\mathbb{R}}$  et  $X_n$  la  $H(\mathbb{R})$ -classe de conjugaison de  $z_n \cdot \alpha$ ; alors  $(H, X_n)$  est une sous-donnée de Shimura. On peut vérifier que la suite de mesures canoniques  $\mu_n$  sur la sous-variété spéciale  $\Gamma \cap H \backslash X_n^+$  n'a pas de sous-suite convergente.

*Preuve.* On peut tout d'abord supposer que  $G$  est adjoint. Cela résulte des définitions de sous-variétés fortement spéciales en termes de la donnée de Shimura adjointe  $(G^{\text{ad}}, X^{\text{ad}})$  et de compatibilités évidentes pour les mesures canoniques des sous-variétés fortement spéciales de  $S$  et de

$$S^{\text{ad}} = \text{Sh}_{K^{\text{ad}}}(G^{\text{ad}}, X^{\text{ad}})(\mathbb{C}).$$

On peut supposer que les  $S_n$  sont des sous-variétés de type Shimura. En effet par le lemme 3.5, en extrayant au besoin une sous-suite, on peut supposer qu'il existe  $\lambda \in R_{G,K}$  tel que  $S_n$  est une composante irréductible de  $T_\lambda \cdot S'_n$  pour une sous-variété fortement spéciale  $S'_n$  de type Shimura. Le résultat pour  $S_n$  se déduit alors de celui pour  $S'_n$ .

Soit donc  $S_n$  une suite de sous-variété fortement spéciales de type Shimura de  $S$ . Soit  $H_{n,\mathbb{Q}}$  des  $\mathbb{Q}$ -sous groupes associés. Soit  $\alpha_n \in X^+$  tel que  $MT(\alpha_n) = T_n$  soit un  $\mathbb{Q}$ -tore contenu dans  $H_{n,\mathbb{Q}}$ . On note alors  $X_n^+$  la  $H_n(\mathbb{R})_+$  classe de conjugaison de  $\alpha_n$  et  $\Delta_n = \Gamma \cap H_n(\mathbb{R})_+$  de sorte que  $S_n = \Delta_n \backslash X_n^+$ .

LEMME 4.8. *Il existe une suite  $\lambda_n \in \Gamma$  telle que si l'on note  $H_{n,\lambda_n}$  et  $X_{n,\lambda_n}^+$  les conjugués de  $H_n$  et  $X_n^+$  définis par le procédé décrit dans la remarque 4.1, alors en passant au besoin à une sous-suite, il existe une suite  $\beta_n \in X_{n,\lambda_n}^+$  qui converge vers  $\beta \in X^+$ .*

D'après le lemme 4.5, il existe un compact  $C'$  de  $\Gamma \backslash X^+$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\Delta_n \backslash X_n^+ \cap C' \neq \emptyset.$$

Soit donc  $t_n \in \Gamma_n \backslash X_n^+ \cap C'$ . On peut supposer, en passant au besoin à une sous-suite, que  $t_n \rightarrow t \in C'$ . Soit

$$\theta : X^+ \rightarrow \Gamma \backslash X^+$$

la projection. Les composantes irréductibles des images inverses par  $\theta$  de  $S_n$  sont de la forme  $\lambda.X_{H_n}^+ = X_{H_{n,\lambda}}^+$  pour un  $\lambda \in \Gamma$ . On peut donc en conjuguant au besoin  $H_n$  par un  $\lambda_n \in \Gamma$  choisir des relevés par  $\theta$  convenables  $\beta_n \in X_{H_{n,\lambda_n}}$  de  $t_n$  dans un domaine fondamental fixe pour l'action de  $\Gamma$  sur  $X^+$ . Alors la suite  $\beta_n \rightarrow \beta$  pour un relevé  $\beta$  convenable de  $t$ .

On peut sans perte de généralité supposer que  $H_n = H_{n,\lambda_n}$ . On a vu que  $H_{n,\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+ \in \mathcal{H}$ . Pour tout  $n$  on note  $\mu'_n$  la mesure de  $Q(\Omega, e)$  de support

$$\Gamma \backslash \Gamma H_n(\mathbb{R})^+.$$

D'après la proposition 2.5, au besoin en passant à une sous-suite, on peut supposer que  $\mu'_n$  converge faiblement vers une mesure  $\mu' \in Q(\Omega, e)$ . De plus pour tout  $n$  assez grand on a

$$\text{supp}(\mu_n) = \Gamma \backslash \Gamma H_n(\mathbb{R})^+ \subset \text{supp}(\mu').$$

D'après la description de  $Q(\Omega, e)$  donnée avant la proposition 2.5 et le lemme 2.1, il existe  $F \in \mathcal{H}$  et un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe algébrique  $H_{\mathbb{Q}}$  tel que  $F = H_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+$ ,  $H_{\mathbb{Q}} = MT(F)$  et  $\mu'$  est la mesure  $H(\mathbb{R})^+$ -invariante de support  $\text{supp}(\mu) = \Gamma \backslash \Gamma H(\mathbb{R})^+$ . On en déduit donc que

$$\Gamma \backslash \Gamma H_n(\mathbb{R})^+ \subset \Gamma \backslash \Gamma H(\mathbb{R})^+.$$

On en déduit que  $\text{Lie}(H_n(\mathbb{R})^+) \subset \text{Lie}(H(\mathbb{R})^+)$  puis par connexité que

$$H_n(\mathbb{R})^+ \subset H(\mathbb{R})^+.$$

Finalement on obtient

$$H_{n,\mathbb{Q}} = MT(H_n(\mathbb{R})^+) \subset H_{\mathbb{Q}} = MT(H(\mathbb{R})^+).$$

Pour tout  $n$  assez grand, on a donc

$$T_n = MT(\alpha_n) \subset H_{n,\mathbb{Q}} \subset H_{\mathbb{Q}},$$

et la  $H(\mathbb{R})_+$ -classe de conjugaison de  $\alpha_n$  est indépendante de  $n$ . On la note  $X_H^+$ . Soit  $\Delta_H = \Gamma \cap H(\mathbb{R})_+$ . D'après le lemme 4.2,  $M = \Delta_H \backslash X_H^+$  est une sous-variété fortement spéciale et pour tout  $n$  assez grand

$$S_n \subset \Delta_H \backslash X_H^+.$$

On termine la démonstration de la manière suivante: pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a vu que  $\pi_{\beta_n} * \mu'_n = \mu_n$ . Comme  $\beta_n \rightarrow \beta$ ,  $\pi_{\beta_n}$  converge simplement et uniformément sur tout compacts vers  $\pi_{\beta}$  et  $\pi_{\beta} * \mu' = \mu_M$ . Soit  $f$  une fonction continue à support compact sur  $\Gamma \backslash X^+$ . On a

$$\mu_n(f) - \mu_M(f) = \mu'_n(f \pi_{\beta_n}) - \mu'(f \pi_{\beta}) = \mu'_n(f \pi_{\beta_n}) - \mu'_n(f \pi_{\beta}) + \mu'_n(f \pi_{\beta}) - \mu'(f \pi_{\beta}).$$



Comme  $\mu'_n$  converge faiblement vers  $\mu'$ ,  $\mu'_n(f\pi_\beta) - \mu'(f\pi_\beta)$  tend vers 0. Par la convergence uniforme sur les compacts de  $\pi_{\beta_n}$  vers  $\pi_\beta$  et le fait que les  $\mu_n$  sont des mesures de probabilités,  $\mu'_n(f\pi_{\beta_n}) - \mu'_n(f\pi_\beta)$  converge aussi vers 0. On en déduit donc que  $\mu_n(f) - \mu_M(f)$  converge vers 0, donc que  $\mu_n$  converge faiblement vers  $\mu_M$ .

ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIE ALGÈBRE, UNIVERSITÉ PARIS-SUD,  
91405 ORSAY, FRANCE  
E-mail addresses: Laurent.Clozel@math.u-psud.fr  
Emmanuel.Ullmo@math.u-psud.fr

## RÉFÉRENCES

- [1] A. BOREL, *Introduction aux Groupes Arithmétiques*, Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg XV, *Actualités Scientifiques et Industrielles*, No. 1341, Hermann, Paris, 1969.
- [2] S. G. DANI and G. A. MARGULIS, Asymptotic behaviour of trajectories of unipotent flows on homogeneous spaces, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **101** (1991), 1–17.
- [3] P. DELIGNE, Travaux de Shimura, *Séminaire Bourbaki*, Exposé 389, *Lecture Notes in Math.* **244**, 123–165, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [4] ———, Variétés de Shimura: interprétation modulaire et techniques de construction de modèles canoniques, dans *Automorphic Forms, Representations, and L-functions* (A. Borel et W. Casselman, editeurs), *Proc. Sympos. Pure Math.* **33**, 247–289, A. M. S., Providence, RI, 1979.
- [5] B. EDIXHOVEN and A. YAFAEV, Subvarieties of Shimura varieties, *Ann. of Math.* **157** (2003), 621–645.
- [6] A. ESKIN, S. MOZES, and N. SHAH, Non-divergence of translates of certain algebraic measures, *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), 48–80.
- [7] G. A. MARGULIS, *Discrete Subgroups of Semi-Simple Lie Groups*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* **17**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [8] B. MOONEN, Linearity properties of Shimura varieties. I, *J. Algebraic Geom.* **7** (1998), 539–567.
- [9] ———, Models of Shimura varieties in mixed characteristic, in *Galois Representations in Arithmetic Algebraic Geometry* (Durham, 1996) (A. J. Scholl and R. L. Taylor, eds.), *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **254**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1998), 267–350.
- [10] S. MOZES and N. SHAH, On the space of ergodic invariant measures of unipotent flows, *Ergod. Theory Dynam. Systems* **15** (1995), 149–159.
- [11] V. PLATONOV and A. RAPINCHUK, *Algebraic Groups and Number Theory*, *Pure and Applied Math. Series* **139**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.
- [12] M. RATNER, On Raghunathan's measure conjecture, *Ann. of Math.* **134** (1991), 545–607.
- [13] ———, Raghunathan's topological conjecture and distributions of unipotent flows, *Duke Math. J.* **63** (1991), 235–280.
- [14] ———, Interaction between ergodic theory, Lie groups and number theory, *Proc. ICM*, Vol. 1 (Zürich, 1994), 157–182, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [15] N. SHAH, Uniformly distributed orbits of certain flows on homogeneous spaces, *Math. Ann.* **289** (1991), 315–334.

(Received January 17, 2003)  
(Revised September 23, 2003)