Annals of Mathematics, **162** (2005), 987–1029

Sur le théorème de Paley-Wiener d'Arthur

By Patrick Delorme

Abstract

The Fourier transform of a C^∞ function, f, with compact support on a real reductive Lie group G is given by a collection of operators $\phi(P,\sigma,\lambda) := \pi^P(\sigma,\lambda)(f)$ for a suitable family of representations of G, which depends on a family, indexed by P in a finite set of parabolic subgroups of G, of pairs of parameters (σ,λ), σ varying in a set of discrete series, λ lying in a complex finite dimensional vector space. The $\pi^P(\sigma,\lambda)$ are generalized principal series, induced from P. It is easy to verify the holomorphy of the Fourier transform in the complex parameters. Also it satisfies some growth properties. Moreover an intertwining operator between two representations $\pi^P(\sigma,\lambda)$, $\pi^{P'}(\sigma',\lambda')$ of the family, implies an intertwining property for $\phi(P,\sigma,\lambda)$ and $\phi(P',\sigma',\lambda')$. There is also a way to introduce "successive (partial) derivatives" of the family of representations, $\pi^P(\sigma,\lambda)$, along the parameter λ, and intertwining operators between subquotients of these successive derivatives imply the intertwining property for the successive derivatives of the Fourier transform ϕ. We show that these properties characterize the collections of operators $(P,\sigma,\lambda) \mapsto \phi(P,\sigma,\lambda)$ which are Fourier transforms of a C^∞ function with compact support, for G linear. The proof, which uses Harish-Chandra's Plancherel formula, rests on a similar result for left and right K-finite functions, which is due to J. Arthur. We give also a proof of Arthur's result, purely in term of representations, involving the work of A. Knapp and E. Stein on intertwining integrals and Langlands and Vogan's classifications of irreducible representations of G.

0. Introduction

Le Théorème de Paley-Wiener de J. Arthur (cf. [A]) décrit la transformée de Fourier de l'espace des fonctions C^∞ à support compact, τ-sphériques, ou K-finies à gauche et à droite sur un groupe réductif réel dans la classe d'Harish-Chandra, où K est un sous-groupe compact maximal de G. La démonstration repose sur le déplacement de contour de certaines intégrales et sur l'étude des résidus ainsi obtenus. Plus récemment ce résultat a été généralisé aux espaces symétriques réductifs par E. van den Ban et H. Schlichtkrull (cf. [BS]), en utilisant également un déplacement de contour d' intégrales et les résidus.

Antérieurement au travail d'Arthur, D. P. Zelobenko (cf. [Z]) avait obtenu le résultat pour les groupes semi-simples complexes, par une méthode basée sur sa classification des représentations irréductibles (cf. [Du] pour une exposition de cette classification) et un argument de récurrence sur la longueur des K-types. Nous avons appris cette méthode dans des notes non publiées de M. Duflo et l'avons appliquée aux groupes semi-simples réels avec une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan (cf. [D1]).

Nous l'appliquons ici à une classe de groupes réductifs réels pour obtenir une démonstration du résultat d'Arthur, qui s'exprime complètement à l'aide des représentations de G. Nous obtenons aussi la caractérisation de la transformée de Fourier de l'algèbre de convolution des distributions sur G, K-finies à droite et à gauche et à support dans K. Enfin, nous caractérisons l'image par la transformée de Fourier de l'espace des fonctions C^∞, à support compact, ce qui est rendu possible par notre reformulation du Théorème d'Arthur en terme de représentations. Le Théorème s'applique notamment au groupe des points réels d'un groupe algébrique connexe défini sur $\mathbb{R}$.

Contrairement au cas des groupes semi-simples complexes, il faut faire intervenir des conditions d'entrelacement portant sur des dérivées partielles d'ordre quelconque des transformées de Fourier, relations introduites par O. Campoli (cf. [Cam]) pour les groupes de rang 1. Nous introduisons ces relations en terme d'entrelacement entre sous-quotients, non nécessairement irréductibles, de dérivées successives de séries principales généralisées (cf. § 1.5 pour cette notion).

La plupart des résultats utilisés pour notre preuve du Théorème d'Arthur datent d'au moins 20 ans notamment ceux sur les intégrales d'entrelacement et leur normalisation [KSt], la classification de Langlands (cf. e.g. [BoWall]) et la classification de Vogan (cf. [V1], [V2]) des représentations irréductibles, les homomorphismes d'Harish-Chandra liés aux K-types minimaux des séries principales généralisées (cf. [D2]), et les multiplicateurs (cf. [D3]). Un résultat récent (cf. [DSou]), qui fait suite à un travail de S. Souaifi (cf. [Sou]), joue toutefois un role crucial. Celui-ci établit que tout module d'Harish-Chandra est un sous-quotient d'une somme finie de dérivées successives de séries principales généralisées. En outre on peut choisir celles-ci de sorte que leurs K-types soient de longueur supérieure ou égale à celle d'au moins un K-type du module original (cf. [DSou, Th. 3]).

La caractérisation de la transformée de Fourier de $C_c^\infty(G)$, utilise d'une part la formule de Plancherel d'Harish-Chandra et d'autre part le résultat suivant de W. Casselman et N. Wallach (cf. [Cass], [Wall]): tout morphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules entre modules d'Harish-Chandra se prolonge continûment en un morphisme de G-modules entre leurs complétions à croissance modérée.

Voici le plan de l'article. Au paragraphe 1, on rappelle les principaux résultats utilisés pour notre preuve du Théorème d'Arthur. Le paragraphe 2 démontre la Proposition 1 qui porte sur l'espace $K_\sigma^{\delta\gamma}$. Le succès de la méthode réside d'une part dans la bonne définition de cet espace intermédiaire, qui tient compte de conditions portant sur les dérivées. Le paragraphe 3 reprend essentiellement la méthode de Zelobenko pour déduire le Théorème de Paley-Wiener pour les fonctions K-finies de la Proposition 1. Le succès de la méthode réside d'autre part dans le résultat de [DSou] cité plus haut. Au paragraphe 4, on établit le Théorème de Paley-Wiener pour l'espace des fonctions C^∞ à support compact, sans condition de K-finitude.

Résumé. Soit G un groupe de Lie réductif linéaire (voir § 1 pour les hypothèses précises) et K un sous-groupe compact maximal de G, qui est le groupe des points fixes d'une involution de Cartan θ. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G dont l'algèbre de Lie contient un sous-espace abélien maximal fixé de l'espace des éléments de l'algèbre de Lie de G antiinvariants par θ. Pour $P \in \mathcal{P}$, on note $P = MAN$ sa décomposition de Langlands.

On introduit la notion de "dérivées (partielles) successives" d'une famille holomorphe d'opérateurs, puis de représentations, dans un espace fixe. En particulier les "dérivées successives" de séries principales généralisées sont également des représentations induites d'un sous-groupe parabolique $P = MAN$ à partir d'une représentation de P triviale sur N, cette représentation induisante étant égale, comme représentation de MA, au produit tensoriel d'une série discrète, σ, de M par une représentation de dimension finie de A dont tous les sous-quotients irréductibles sont isomorphes à une représentation de différentielle $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. On notera $(I(\sigma), \pi^P(\sigma, \lambda))$ la réalisation compacte du $(\mathfrak{g}, K)$-module des vecteurs K-finis de la série principale correspondante.

Soit $\gamma, \delta \in \hat{K}$. On note χ_δ la fonction C^∞ sur K qui est représentée par le projecteur sur la composante isotypique de type δ dans toute représent ation continue de K. On note $\mathcal{PW}(G, K)^{\delta\gamma}$ l'espace des applications ϕ qui à (P, σ, λ), avec $P \in \mathcal{P}$, σ série discrète de M dans un espace de Hilbert, fixé une fois pour toute pour chaque dimension, et $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, associe $\phi(P, \sigma, \lambda) \in \mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, I(\sigma)^\delta)$ qu'on peut regarder comme un élément de $\mathrm{Hom}(I(\sigma), I(\sigma))$, nul sur les composantes isotypiques de K distinctes de celle de γ, $I(\sigma)^\gamma$ et telles que:

1) Comme fonction de λ, $\phi(P, \sigma, \lambda)$ est la transformée de Fourier d'une fonction C^∞ à support compact, à valeurs dans $\mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, I(\sigma)^\delta)$.

2) Les opérateurs $\phi(P, \sigma, \lambda)$, $\phi(P', \sigma', \lambda')$ sont entrelacés par tout opérateur d'entrelacement entre les $(\mathfrak{g}, K)$-modules $\pi^P(\sigma, \lambda)$ et $\pi^{P'}(\sigma', \lambda')$. Chaque dérivée partielle successive des $\phi(P, \sigma, \lambda)$ définit un opérateur dans la dérivée partielle successive correspondante de $\pi^P(\sigma, \lambda)$ et donc dans leurs

sommes finies. On suppose que ces opérateurs laissent stables tout $(\mathfrak{g}, K)$-sous-module et qu'ils définissent par conséquent un opérateur dans les sous-quotients, pas nécessairement irréductibles. On demande enfin que tout entrelacement entre ces sous-quotients entrelace les opérateurs déterminés par ϕ dans ces sous-quotients.

Remarquez qu'en tenant compte de la propriété 2), du Théorème du sous-module de Casselman et de l'induction par étages, on voit que ϕ est déterminée par ses restrictions aux paramètres (P, σ, λ), avec $P \in \mathcal{P}$ sous-groupe parabolique minimal.

On note $C_c^\infty(G)^{\delta\gamma}$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact, f, telles que $\chi_\delta \star f \star \chi_\gamma = f$. La transformée de Fourier d'un élément de cet espace est l'application qui à tout (P, σ, λ) comme ci-dessus associe $\pi^P(\sigma, \lambda)(f)$, regardé comme un élément de $\mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, I(\sigma)^\delta)$ (voir ci-dessus). L'espace de ces transformées de Fourier est noté $\mathcal{F}(G, K)^{\delta\gamma}$. Il s'agit de prouver l'égalité de $\mathcal{F}(G, K)^{\delta\gamma}$ et de $\mathcal{PW}(G, K)^{\delta\gamma}$ (cf. Théorème 1: c'est la version K-finie du Théorème d'Arthur). L'inclusion du premier espace dans le second est facile à prouver.

Pour prouver l'inclusion inverse, il faut introduire un espace auxiliaire. Soit MA le sous-groupe de Lévi d'un élément de $\mathcal{P}$ et σ une série discrète de M. On note $A(\sigma)$ l'ensemble des K-types minimaux de $I(\sigma)$. Pour simplifier ce résumé, on suppose que $A(\sigma)$ est réduit à un élément, μ. On note $\mathcal{F}_\sigma^{\delta\gamma}$ l'ensemble des restrictions des éléments de $\mathcal{F}(G, K)^{\delta\gamma}$ aux triplets (P, σ, λ) avec $P \in \mathcal{P}$, de sous-groupe de Lévi MA, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. On définit de même $\mathcal{PW}_\sigma^{\delta\gamma}$. Il résulte du travail commun avec L. Clozel (cf.[CD1]) que l'on a l'égalité:

$$\mathcal{F}_\sigma^{\mu\mu} = \mathcal{PW}_\sigma^{\mu\mu}.$$

On a même une description de ces espaces à l'aide d'invariants sous un sous-groupe d'un groupe de Weyl. Nous en donnons ici une preuve plus simple, basée sur un travail commun avec M. Flensted-Jensen (cf. [DF-J]). On note $\mathcal{K}_\sigma^{\delta\gamma}$ l'espace des éléments ϕ de $\mathcal{PW}_\sigma^{\delta\gamma}$ vérifiant certaines propriétés d'annulation que nous allons essayer de décrire d'une façon plus imagée que dans le corps du texte. Si P, Q sont des sous-groupes paraboliques adjacents, de sous groupe de Lévi MA, les intégrales d'entrelacement normalisées de A. Knapp et E. Stein, $\mathcal{A}(Q, P, \sigma, \lambda)$, dépendent d'un paramètre complexe $z = \lambda_\alpha$, où α est la seule racine réduite de $\mathfrak{a}$ à la fois positive pour P et négative pour Q. La condition imposée est que, à chaque fois que l'on a de telles données avec $\mathrm{Re}\lambda_\alpha \geq 0$, on ait $\phi(P, \sigma, \lambda)$ qui s'annule sur le noyau de $\mathcal{A}(Q, P, \sigma, \lambda)$, et, plus généralement, on impose qu'il en est de même pour les "dérivées", d'ordre quelconque, par rapport à la variable z, de ces familles d'opérateurs. La deuxième étape importante de la démonstration du Théorème 1 est la preuve du fait que tout élément ϕ de $\mathcal{K}_\sigma^{\delta\gamma}$ s'écrit :

$$\phi(P,\sigma,\lambda) \equiv \sum_i \pi^P(\sigma,\lambda)(u_i)\phi_i(P,\sigma,\lambda)\pi^P(\sigma,\lambda)(u_i')$$

où u_i, u_j' sont des éléments de l'algèbre de convolution, $\mathbb{H}(G,K)$, des distributions sur G, à support dans K, K-finies à droite et à gauche, vérifiant $\chi_\delta \star u_i \star \chi_\mu = u_i$, $\chi_\mu \star u_i' \star \chi_\gamma = u_i'$, et les ϕ_i sont éléments de $\mathcal{F}_\sigma^{\mu\mu}$. On traite cette question sous-forme matricielle, en introduisant un deuxième indice j pour paramétrer les u', les ϕ_i sont remplacés par une famille dépendant alors de i et j, ϕ_{ij}. Les données sont ϕ et les u_i, u_j' et les inconnues les ϕ_{ij}. Il s'agit de systèmes linéaires dépendant de λ. La solution fait apparaître un dénominateur égal à un déterminant, ce qui introduit des fonctions méromorphes là où on voudrait voir des fonctions holomorphes. Ce déterminant est produit de deux facteurs polynomiaux. L'un des facteurs, qui ne dépend pas des données, est un produit de formes affines, lié aux propriétés des opérateurs d'entrelacement. On montre que ce facteur divise le numérateur des solutions en utilisant les propriétés caractéristiques de $\phi \in \mathcal{K}_\sigma^{\delta\gamma}$. On montre alors que les solutions multipliées par l'autre facteur du dénominateur ont les propriétés voulues, i.e. appartiennent à $\mathcal{F}_\sigma^{\mu\mu}$. Ce deuxième facteur du dénominateur dépend des u_i et u_j', et leurs combinaisons linéaires, lorsque u_i et u_j' varient engendrent un idéal d'une algèbre de polynômes sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$. On montre que cet idéal est sans zéro en utilisant notamment le fait que si $\mathrm{Re}\lambda$ est P-dominant le K-type μ est cyclique pour $\pi^P(\sigma,\lambda)$. Le thèorème des zéros de Hilbert montre que cet idéal contient la constante 1. On obtient la représentation voulue de ϕ par une simple sommation. Ceci fait l'objet de la Proposition 1. Celle-ci a comme corollaire immédiat l'inclusion de $\mathcal{K}_\sigma^{\delta\gamma}$ dans $\mathcal{F}_\sigma^{\delta\gamma}$.

Pour achever la preuve du Théorème 1, on introduit, pour $t \geq 0$, un sous-espace $N_t^{\delta\gamma}$ de $\mathcal{PW}(G,K)^{\delta\gamma}$ formé des éléments ϕ de ce dernier tels que $\phi(P,\sigma,\lambda)$ est nul si la longueur du K-type $\mu \in A(\sigma)$ est supérieure où égale à t. L'objet de la Proposition 2 est de montrer que $N_t^{\delta\gamma}$ est inclus dans $\mathcal{F}(G,K)^{\delta\gamma}$. Il suffit de voir que l'assertion est vraie pour t égal à l'une quelconque des longueurs $t_1 < \cdots < t_p$ d'un K-type minimal d'une série principale généralisée contenant γ et aussi pour $t_{p+1} := t_p + 1$, car $N_t^{\delta\gamma}$ est égal à l'un des $N_{t_q}^{\delta\gamma}$. On fait une récurrence sur $q = 1,\dots,p+1$. Soit MA le sous-groupe de Levi d'un élément P de $\mathcal{P}$, σ une série discrète de M telle que $\mu \in A(\sigma)$ soit de longueur t_q. Le pas de récurrence réside dans le fait que si ϕ est élément de $N_{t_q}^{\delta\gamma}$, la restriction de ϕ aux (P,σ,λ), où P admet MA comme sous-groupe de Lévi, et $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, est un élément de $\mathcal{K}_\sigma^{\delta\gamma}$. C'est dans cette preuve que le Théorème sur les modules d'Harish-Chandra cité ci-dessus (cf. [DSou]) est utilisé. On utilise alors la Proposition 1 ou son corollaire, pour obtenir, par une soustraction à ϕ d'une somme finie d'éléments de $\mathcal{F}(G,K)^{\delta\gamma}$, un élément de $N_{t_{q-1}}^{\delta\gamma}$, auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Cette Proposition 2 implique le Théorème 1 car pour t strictement plus grand que la longueur de γ, $N_t^{\delta\gamma}$ est égal à $\mathcal{PW}(G,K)^{\delta\gamma}$. En effet si $\mu \in A(\sigma)$ est de longueur strictement plus grand que la longueur de γ, $I(\sigma)$ ne contient pas le K-type γ, donc pour $\phi \in \mathcal{PW}(G,K)^{\delta\gamma}$, $\phi(P,\sigma,\lambda)$ est nul pour tout λ.

Pour déterminer l'image par la transformée de Fourier de $C_c^\infty(G)$, $\mathcal{F}(G)$, on introduit un espace $\mathcal{PW}(G)$, avec des conditions portant sur des entrelacements entre certains G-module lisses à croissance modérées, les sommes finies de dérivées successives de séries principales généralisées. Cet espace contient $\mathcal{F}(G)$. Il faut montrer l'inclusion inverse. L'espace $\mathcal{PW}(G)$ est un espace de Fréchet sur lequel $K \times K$ opère de façon C^∞. Alors un élément ϕ de cet espace est la somme de ses composantes isotypiques sous $K \times K$, $\phi^{\delta\gamma}$. Mais grâce au résultat de Casselman et Wallach rappelé plus haut, on peut montrer que $\phi^{\delta\gamma}$ est élément de $\mathcal{PW}(G,K)^{\delta\gamma}$, donc, d'après le Théorème 1, c'est la transformée de Fourier d'un élément $f^{\delta\gamma}$ de $C_c^\infty(G)^{\delta\gamma}$. Grâce à la formule de Plancherel d'Harish-Chandra, et la définition de $\mathcal{PW}(G)$, on voit que la série des $f^{\delta\gamma}$ converge dans $L^2(G)$, vers une fonction f. On note $\Delta = C_{\mathfrak{g}} - 2C_{\mathfrak{k}}$ où $C_{\mathfrak{g}}$ est le Casimir de l'algèbre de Lie de G et $C_{\mathfrak{k}}$ est un élément du centre de l'algèbre enveloppante, $\mathbb{U}(\mathfrak{k})$, de la complexifiée de l'algèbre de Lie de K tel que Δ soit un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2. On voit de même que, pour $p \in \mathbb{N}$ la série des $\Delta^p f^{\delta\gamma}$ converge dans $L^2(G)$. On en déduit que la distribution $\Delta^p f$ est élément de $L^2(G)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Mais Δ est un opérateur elliptique, donc f est C^∞. Par ailleurs le Théorème 1 dans sa forme précise permet de controler les supports des $f^{\delta\gamma}$. Finalement f est élément de $C_c^\infty(G)$. Pour conclure que $\phi \in \mathcal{F}(G)$, on vérifie que f admet ϕ comme transformée de Fourier.

Remerciements. C'est Michel Duflo qui a éveillé, à la fin des années 70, mon intérêt pour le Théorème de Paley-Wiener pour les groupes réels réductifs. C'est une conversation récente avec lui, à propos des travaux d'E. van den Ban et H. Schlichtkrull, qui m'a fait reconsidérer cette question. Je le remercie de tous les points de vue enrichissants dont il m'a fait bénéficier.

Je remercie également Jacques Carmona pour ses réponses aux nombreuses questions que je lui ai posées pendant toute l'élaboration de ce travail.

Je remercie enfin Sofien Souaifi pour de nombreuses remarques et Abderrazak Bouaziz pour des questions constructives.

1. Notations, rappels

1.1. *Hypothèses sur G.* Si E est un espace vectoriel, E^* désigne son dual. Si E est réel, $E_{\mathbb{C}}$ désigne son complexifié et $S(E)$ l'algèbre symétrique de $E_{\mathbb{C}}$. Si E, F sont des espaces vectoriels complexes on note $\mathrm{Hom}(E,F)$ l'ensemble des applications $\mathbb{C}$-linéaires de E dans F. On dit qu'une application d'un espace vectoriel complexe de dimension finie dans un espace vectoriel complexe est polynômiale si son image est contenue dans un espace de dimension finie et polynômiale comme application à valeurs dans celui-ci.

Si G est un groupe de Lie, on note G^0 sa composante neutre, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$.

Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Noter que cette hypothèse est gouvernée par notre recours à (1.6), (1.7), (1.8) (voir plus bas). Alors $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ s'identifie à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. On note $G_{\mathbb{C}}$ le sous-groupe analytique de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et $Z_{\mathbb{C}}(G)$ le centralisateur de G dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. On suppose:

$$(1.1) \qquad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \mathfrak{g} \text{ est réductive;} \\ \text{(ii)} & G \text{ a un nombre fini de composantes connexes;} \\ \text{(iii)} & G \subset G_{\mathbb{C}} Z_{\mathbb{C}}(G). \end{array}$$

Alors G est dans la classe d'Harish-Chandra [H-C]. L'intersection ${}^0G$ des noyaux des caractères de G à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$ vérifie les hypothèses de [KSt] et [K] dont les résultats s'étendent immédiatement à G. Par ailleurs, nos hypothèses sur G sont celles de [CD1]. On note θ une involution de Cartan de G et K le groupe des points fixes de θ. On note A_G le sous-groupe analytique de G dont l'algèbre de Lie est l'espace des éléments du centre de $\mathfrak{g}$ antiinvariants par θ. On l'appelle composante déployée de G. On a $G = {}^0GA_G$. On fixe une forme bilinéaire symétrique, B, sur $\mathfrak{g}$, invariante par $\mathrm{Ad}\, G$ et θ, telle que la forme quadratique $\|X\|^2 = -B(X, \theta X)$ soit définie positive.

1.2. *Intégrales d'entrelacements.* Soit P un sous-groupe parabolique de G. On note L_P ou $L = P \cap \theta(P)$, A_P ou A la composante déployée de L, $M = {}^0L$, N ou N_P son radical unipotent. On appelle $P = MAN$ la décomposition de Langlands de P, L le sous-groupe de Lévi de P. On note ρ ou ρ_P la forme linéaire sur $\mathfrak{a}$, définie par $\rho(X) = 1/2\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X_{|\mathfrak{n}})$, $X \in \mathfrak{a}$. On note $\Delta(\mathfrak{a})$ l'ensemble des racines réduites de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ et pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{a})$, on note $\mathfrak{g}_\alpha$ le sous-espace radiciel correspondant. On note $\Delta_P^+ = \{\alpha \in \Delta(\mathfrak{a}) | \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}_P\}$ et $C_P = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* | (\lambda, \alpha) > 0, \alpha \in \Delta_P^+\}$. On notera $\overline{C}_P$, l'adhérence de C_P dans $\mathfrak{a}^*$. On note $W(A)$ le groupe de Weyl de (G, A), égal au quotient du normalisateur, $N_K(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$ dans K, par son centralisateur $Z_K(\mathfrak{a})$, qui opère sur les classes d'équivalence de représentations unitaires de M et sur le dual unitaire $\hat{M}$ de M. *On fixe une fois pour toutes, un espace de Hilbert pour chaque dimension.* Soit $\hat{M}_d$ l'ensemble des représentations de la série discrète de M dans ces espaces. Il s'agit de représentations concrètes et non de classes d'équivalences. Si $\sigma \in \hat{M}_d$, on note W_σ le stabilisateur de la classe d'équivalence de σ dans $W(A)$.

On fixe un sous-groupe parabolique minimal $P_{\min} = M_{\min} A_{\min} N_{\min}$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G contenant $A_{\min}$, soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des sous-groupes de Lévi des éléments de $\mathcal{P}$. Pour $L \in \mathcal{L}$, on note $\mathcal{P}(L)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}$ dont le sous-groupe de Lévi est égal à L.

On note $\mathcal{P}_{st}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}$ contenant $P_{\min}$, dont les éléments sont dits standards. On note $W^G := W(A_m)$.

Soit (σ, H_σ) une représentation continue de M, dans un espace de Hilbert , dont la restriction à $K\cap M$ est unitaire, dont la multiplicité des $K\cap M$-types est finie et dont le $(\mathfrak{m}, K\cap M)$-module sous-jacent est de longueur finie. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. On note H^∞_σ l'espace des vecteurs C^∞ de H_σ. On considère l'espace $I^{P,\infty}(\sigma,\lambda)$, l'espace des fonctions C^∞, $\varphi : G \to H^\infty_\sigma$ vérifiant $\varphi(gman) = a^{-\lambda-\rho}\varphi(g)$, $g \in G$, $a \in A$, $n \in N$. Le groupe G agit sur $I^{P,\infty}(\sigma,\lambda)$ par translation à gauche.

On note $I^P(\sigma,\lambda)$ l'espace des vecteurs K-finis de $I^{P,\infty}(\sigma,\lambda)$, $I^{P,2}(\sigma,\lambda)$ le complété de $I^{P,\infty}(\delta,\lambda)$ pour le produit scalaire: $(\varphi|\varphi') = \int_K(\varphi(k)|\varphi'(k))dk$. Dans ces trois espaces, on note $\pi^P(\sigma,\lambda)$ la représentation de G ou $(\mathfrak{g}, K)$ correspondante. On note $I^\infty(\sigma)$, $I(\sigma)$, $I^2(\sigma)$, l'espace, indépendant de λ, des restrictions à K des éléments de $I^{P,\infty}(\sigma,\lambda)$, $I^P(\sigma,\lambda)$, $I^{P,2}(\sigma,\lambda)$. La restriction à K est une bijection entre ces espaces et on note $\overline{\pi}^P(\sigma,\lambda)$ (ou encore $\pi^P(\sigma,\lambda)$, par abus de notation), la représentation de G, ou $(\mathfrak{g}, K)$, obtenue par transport de structure.

On appelle application holomorphe d'une ou plusieurs variables complexes à valeurs dans un espace vectoriel complexe, V, sans topologie spécifiée, toute application à valeurs dans un sous-espace de dimension finie, et holomorphe comme application à valeurs dans ce sous-espace. Par contre, si V est un espace de Fréchet, on emploiera la définition usuelle et ses propriétés (cf. [Bou, §3.3]).

On appelle application méromorphe à valeurs dans un espace vectoriel complexe V au voisinage de $z \in \mathbb{C}^n$, toute application localement de la forme $g^{-1}f$ où f (resp. g) est une fonction holomorphe au voisinage de z à valeurs dans V (resp. $\mathbb{C}$).

(1.2) Soit P_1, P_2, P_3 des sous-groupes paraboliques de sous-groupe de Levi MA. On note dn une mesure de Haar sur $\theta(N_1) \cap N_2$. Alors:

(i) Il existe une unique fonction sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, $\lambda \mapsto A(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$, à valeurs dans les endomorphismes de $I(\sigma)$, telle que pour tout $\varphi \in I(\sigma)$, $\lambda \mapsto A(P_2, P_1, \sigma, \lambda)\varphi$ soit méromorphe, caractérisée par la propriété suivante:

Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout λ vérifiant $(\mathrm{Re}\,\lambda, \alpha) > C$ pour tout $\alpha \in \Delta^+_{P_1} \cap -\Delta^+_{P_2}$, on ait:

$$(A(P_2, P_1, \sigma, \lambda)\varphi)(k) = \int_{\theta(N_1)\cap N_2} \tilde{\varphi}_{P_1}(kn)dn, \;\; \varphi \in I(\sigma), k \in K.$$

Ici l'intégrale est absolument convergente et $\tilde{\varphi}_{P_1}$ désigne l'unique élément de $I^{P_1}(\sigma,\lambda)$ dont la restriction à K est égale à φ.

Lorsqu'il est défini, $A(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ entrelace $\pi^{P_1}(\sigma,\lambda)$ et $\pi^{P_2}(\sigma,\lambda)$.

(ii) Si σ est une série discrète ou plus généralement une représentation tempérée, on peut prendre $C = 0$.

(iii) Pour λ élément du complémentaire de l'ensemble des zéros d'une fonction méromorphe non identiquement nulle, $A(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ est inversible.

(iv) Pour une normalisation convenable des mesures, si $\mathfrak{n}_{P_3} \cap \mathfrak{n}_{P_1} \subset \mathfrak{n}_{P_2} \cap \mathfrak{n}_{P_1}$, on a l'égalité de fonctions méromorphes en $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$A(P_3, P_1, \sigma, \lambda) = A(P_3, P_2, \sigma, \lambda)A(P_2, P_1, \sigma, \lambda).$$

Références. Pour (i), cf. [KSt, Th. 6.6]. Pour (ii), cf. [H-C, Lemme 5.1]. Pour (iii), cf. [KSt, Props. 7.3, 7.4 (c), 7.5 et Th. 7.6]. Pour (iv), cf. [KSt, Cor. 7.7].

(1.3) Soit $P = MAN \subset P' = M'A'N'$ deux éléments de $\mathcal{P}$. Soit σ une représentation unitaire irréductible de M ou plus généralement comme dans (1.2). On note $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}'$ de sorte que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'' \oplus \mathfrak{a}'$. On note $\lambda = \lambda'' + \lambda'$ la décomposition correspondante de $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. On note $P'' := P \cap M'$ qui admet la décomposition de Langlands $P'' = MA''N''$, où A'' est le sous-groupe analytique de A, d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}''$, $N'' = N \cap M'$. On note σ' la représentation $\pi^{P''}(\sigma, \lambda'')$ de M', dans $I^{P',2}(\sigma, \lambda'')$. Alors on dispose d'un isomorphisme naturel entre $I^P(\sigma, \lambda)$ et $I^{P'}(\sigma', \lambda')$ donné par:

$$\varphi \in I^P(\sigma, \lambda) \mapsto \varphi' \in I^{P'}(\sigma', \lambda'), ou (\varphi'(g))(m') = \varphi(gm'), g \in G, m' \in M'.$$

On considère Q un sous-groupe parabolique adjacent à P: il existe une unique racine réduite, α, de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}_P \cap (\theta(\mathfrak{n}_Q))$. On note G_α le centralisateur de $\operatorname{Ker} \alpha$ dans G, et $G_\alpha = M_\alpha A_\alpha$ sa décomposition de Langlands. On note P' (resp. Q') le sous-groupe parabolique de G engendré par P (resp. Q) et G_α, qui admet G_α comme sous-groupe de Levi. On définit P'' et Q'' comme ci-dessus. A'' est alors de dimension 1 et on note λ_α au lieu de λ''. Dans l'isomorphisme entre $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^*$ donné par le produit scalaire, B, α peut être pris comme base de $\mathfrak{a}''$ et λ_α s'identifie à un scalaire.

(1.4) Tenant compte de l'isomorphisme (1.3) pour P et Q, dans la réalisation compacte, on a l'identité de fonctions méromorphes en $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$(A(Q, P, \sigma, \lambda)\varphi)'(k) = A(Q'', P'', \sigma, \lambda_\alpha)(\varphi'(k)),\ k \in K,\ \varphi \in I^P(\sigma, \lambda)$$

où les deux membres sont des fonctions de $k' \in K \cap M'$.

Enfin on a (cf. e.g. [BoWall, IV 4.5, 4.6]):

(1.5) Si Re λ est strictement P-dominant, et σ est tempérée irréductible, $\pi^P(\sigma,\lambda)$ admet un unique quotient simple, $J^P(\sigma,\lambda)$, égal à l'image de l'opérateur d'entrelacement $A(\overline{P},P,\sigma,\lambda)$ (qui est bien défini puisque σ est tempérée (cf. (1.2) (ii)).

1.3. *K-types minimaux et séries principales généralisées.* On note $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$. On fixe un ensemble $\Delta^+(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$ de racines positives de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, et on note $2\rho_c$ la somme des éléments de $\Delta^+(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$.

Si $\gamma\in\hat{K}$, on appelle plus haut poids de γ, tout $\overline{\gamma}\in i\mathfrak{t}^*$ tel que γ admet un vecteur non nul de poids $\overline{\gamma}$ sous $\mathfrak{t}$ et annulé par tous les éléments de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ de poids α, lorsque α décrit $\Delta^+(\mathfrak{k},\mathfrak{t})$. Notez qu'il existe au moins un plus haut poids, mais celui-ci n'est pas nécessairement unique. L'espace $\mathfrak{t}$ est muni d'un produit scalaire, à l'aide de $-B$, donc aussi $i\mathfrak{t}^*$. On définit comme D. Vogan (cf. [V3, Déf. 5.4.18]) , la longueur de γ, $\|\gamma\|$, comme étant la norme de $\overline{\gamma}+2\rho_c$.

Soit MA le sous-groupe de Levi d'un élément de $\mathcal{P}$. Soit $\sigma\in\hat{M}_d$ (*on fera toujours cette hypothèse dans la suite*). On note $A(\sigma)$ l'ensemble des K-types minimaux de $I(\sigma)$, i.e. de longueur minimale.

Nous allons rappeler des résultats de D. Vogan (cf. [V1], [V2]):

(1.6) Soit $\mu\in A(\sigma)$ et $P\in\mathcal{P}(MA)$. Alors μ est contenu avec multiplicité un dans $I(\sigma)$. On note $J^P(\sigma,\lambda)(\mu)$, l'unique sous-quotient simple de $I^P(\sigma,\lambda)$ contenant le K-type μ. Alors à isomorphisme près, $J^P(\sigma,\lambda)(\mu)$ ne dépend pas de P et sera noté $J(\sigma,\lambda)(\mu)$.

(1.7) Si $\mathrm{Re}\,\lambda\in\overline{C}_P$ (resp. $-\overline{C}_P$), $I^P(\sigma,\lambda)$ se décompose de manière unique en:

$$I^P(\sigma,\lambda)=I^P_1(\sigma,\lambda)\oplus\cdots\oplus I^P_{r(\sigma,\lambda)}(\sigma,\lambda)$$

de telle sorte que pour $i=1,\dots,r(\sigma,\lambda)$, $I^P_i(\sigma,\lambda)$ a un unique quotient simple (resp. sous-module simple) $J^P_i(\sigma,\lambda)$.

De plus:

$$\{J^P_i(\sigma,\lambda)|i=1,\dots,r(\sigma,\lambda)\}=\{J(\sigma,\lambda)(\mu)|\mu\in A(\sigma)\}.$$

En particulier, pour tout $\mu\in A(\sigma)$, $J(\sigma,\lambda)(\mu)$ est un quotient (resp. sous-module) simple de $I^P(\sigma,\lambda)$ et $\{J(\sigma,\lambda)(\mu)|\mu\in A(\sigma)\}$ est l'ensemble des quotients (resp. sous-modules) simples de $I^P(\sigma,\lambda)$.

(1.8) Il existe un sous-groupe distingué W^0_σ tel que le quotient R_σ, de W_σ par W^0_σ soit un produit de copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et tel qu'il existe une action simplement transitive du groupe dual $\hat{R}_\sigma$, de R_σ, sur $A(\sigma)$, vérifiant les propriétés suivantes:

Pour $\sigma,\sigma'\in\hat{M}_d$ et $\lambda,\lambda'\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, $J(\sigma,\lambda)(\mu)=J(\sigma',\lambda')(\mu')$ si et seulement si (σ,λ) est conjugué à (σ',λ'), à équivalence près, par un élément de

$W(A)$ et $\mu' \in \hat{R}_\sigma(\lambda)\mu$, où $\hat{R}_\sigma(\lambda)$ est l'orthogonal dans $\hat{R}_\sigma$ de $R_{\sigma,\lambda} := \{\overline{w} \in R_\sigma | w \in W_\sigma, w\lambda \in W_\sigma^0\lambda\}$, et où $\overline{w}$ désigne la projection dans R_σ de w.

Références. Ces résultats apparaissent dans [V1], [V2], si G est connexe: pour (1.6), cf. [V1, Th. 1.1], pour (1.7) cf. [V2, Th. 12.14 et Cor. 12.15], pour (1.8) cf. [V2, Th. 12.1] (voir aussi l'Appendice de cet article, §5.2). Si G n'est pas connexe nous donnons dans l'Appendice une réduction au cas connexe utilisant les résultats de [CD1, §4] (voir aussi [V3, Ch. 6.6]).

Remarque 1. Il résulte de (1.6), (1.7), (1.8) que les résultats de [D2] se généralisent immédiatement au cas où G est non connexe, en y remplaçant $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$ par $\mathbb{H}(G, K)$ (voir ci-dessous §1.7 pour la définition de $\mathbb{H}(G, K)$ et (1.13), (1.15), (1.36) pour les généralisations que nous utiliserons). Désormais une référence à [D2] signifiera une référence à son extension au cas où G est non connexe.

1.4. *K-types minimaux, intégrales d'entrelacement normalisées et R-groupe.* Soit $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(L)$. On fixe $\mu_0 \in A(\sigma)$. On note $a_0(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ le scalaire par lequel $A(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ agit sur le K-type μ_0 de $I(\sigma)$. Montrons que c'est une fonction méromorphe non identiquement nulle. En effet (1.5) joint à (1.7), (1.8), montre que:

(1.9) Pour $\operatorname{Re}\lambda$ strictement P-dominant, l'unique quotient simple $J^P(\sigma, \lambda)$ de $I^P(\sigma, \lambda)$ contient tous les éléments de $A(\sigma)$ et $A(\overline{P}, P, \sigma, \lambda)$ est non nul sur chacune des composantes isotypiques $I(\sigma)^\mu$, $\mu \in A(\sigma)$. En particulier $a_0(\overline{P}, P, \sigma, \lambda)$ est non nul.

Alors, utilisant les propriétés des intégrales d'entrelacement (cf. (1.2) (iv), appliqué avec $P_3 = \overline{P}_1$), on en déduit:

(1.10) Pour $\operatorname{Re}\lambda$ strictement P-dominant, $a_0(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ est non nul.

Les fonctions méromorphes en $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$\mathcal{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda) = a_0(P_2, P_1, \sigma, \lambda)^{-1} A(P_2, P_1, \sigma, \lambda) \tag{1.11}$$

vérifient:

(1.12) (i) Pour tout $\delta \in \hat{K}$, la restriction $\mathcal{A}^\delta(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ de $\mathcal{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ à $I(\sigma)^\delta$ est rationnelle en λ.

(ii) Lorsqu'il est défini $\mathcal{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ entrelace $\pi^{P_1}(\sigma, \lambda)$ et $\pi^{P_2}(\sigma, \lambda)$.

(iii) $\mathcal{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)\mathcal{A}(P_1, P_2, \sigma, \lambda) = \mathrm{Id}_{I(\sigma)}$.

(iv) Soit $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{P}(L)$. On a l'identité de fonctions méromorphes en $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$\mathcal{A}(P_3, P_2, \sigma, \lambda)\mathcal{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda) = \mathcal{A}(P_3, P_1, \sigma, \lambda).$$

(v) $\mathcal{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ est défini et unitaire pour $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$.

Références. Pour l'existence d'opérateurs d'entrelacements normalisés vérifiant (i) à (iv), à l'exception de la rationalité, cf. [KSt, Lemme 8.3, Th. 8.4 et Prop. 8.5]. On peut modifier les facteurs de normalisation en rendant les opérateurs normalisés triviaux sur le K-type μ_0. Cette modification préserve les propriétés (i) à (iv),à l'exception de la rationalité. Seule la propriété (iii) n'est pas immédiate. Elle est vraie à une constante multiplicative près, comme cela résulte des définitions et de [KSt, Th. 8.4]. Mais comme les deux membres sont triviaux sur $I(\sigma)^{\mu_0}$, l'égalité voulue en résulte.

Prouvons la rationalité en λ de $\mathcal{A}^\delta(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$. Soit $v_1, \ldots, v_l \in I(\sigma)^{\mu_0}$, où $l = \dim I(\sigma)^\delta$, soit $h_1, \ldots, h_l \in \mathbb{H}(G, K)^{\delta\mu_0}$. On note $V = \oplus\mathbb{C}v_i$. On définit pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, et $P \in \mathcal{P}(L)$, $T(P, \lambda) \in \mathrm{Hom}(V, I(\sigma)^\delta)$ par:

$$T(P, \lambda)v_i = \pi^P(\sigma, \lambda)(h_i)v_i.$$

Cette application est polynômiale en λ (cf. [D2, Prop. 1 (i)]). On fixe $\lambda_0 \in C_{P_1}$. D'après (1.5), (1.7), le K-type μ_0 est cyclique pour $\pi^{P_1}(\sigma, \lambda_0)$. On peut donc choisir les v_i et les h_i de sorte que $T(P_1, \lambda_0)$ soit surjective, et donc bijective pour des raisons de dimension. Donc $T(P_1, \lambda)^{-1}$ est rationnelle en λ. Utilisant les propriétés d'entrelacement des opérateurs $\mathcal{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$, et leur trivialité sur $I(\sigma)^{\mu_0}$, on voit que:

$$\mathcal{A}^\delta(P_2, P_1, \sigma, \lambda)T(P_1, \lambda) = T(P_2, \lambda).$$

D'où l'on déduit l'identité de fonctions méromorphes:

$$\mathcal{A}^\delta(P_2, P_1, \sigma, \lambda) = T(P_2, \lambda)T(P_1, \lambda)^{-1}.$$

Ceci achève de prouver la rationalité de $\mathcal{A}^\delta(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$.

On note, pour $\gamma \in A(\sigma)$, $a^\gamma(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ le scalaire par lequel $\mathcal{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$, lorsqu'il est défini, agit sur $I(\sigma)^\gamma$. C'est une fonction rationnelle en $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, d'après (1.12) (i), non identiquement nulle (cf. (1.12) (iii)). D'aprés [D2, Lemme 1]:

(1.13) Pour $\delta, \gamma \in \hat{K}$, le rapport $a^\delta(P_2, P_1, \sigma, \lambda)a^\gamma(P_2, P_1, \sigma, \lambda)^{-1}$ est indépendant de $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. On le note $a^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma)$. Il ne dépend pas du choix de μ_0.

Soit $w \in W_\sigma$. On note $\tilde{w}$ un représentant de w dans $N_K(\mathfrak{a})$. On note $R(\tilde{w})$ l'isomorphisme de $I(\sigma)$ sur $I(\tilde{w}\sigma)$ défini par:

$$(R(\tilde{w})\varphi)(k) = \varphi(k\tilde{w}),\ \varphi \in I(\sigma),\ k \in K$$

qui entrelace $\pi^P(\sigma,\lambda)$ et $\pi^{wPw^{-1}}(\tilde{w}\sigma, w\lambda)$. On note

$$\mathcal{A}(P,\tilde{w},\sigma,\lambda) := R(\tilde{w})\mathcal{A}(w^{-1}Pw, P,\sigma,\lambda)$$

qui est un entrelacement entre $\pi^P(\sigma,\lambda)$ et $\pi^P(\tilde{w}\sigma, w\lambda)$.

Soit $w \in W_\sigma$ et $T_{\tilde{w}}$ un entrelacement unitaire entre σ et $\tilde{w}\sigma$. Alors, la fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, à valeurs dans les endomorphismes de $I(\sigma)$, $T_{\tilde{w}}\mathcal{A}(P,\tilde{w},\sigma,\lambda)$, définie par:

$$((T_{\tilde{w}}\mathcal{A}(P,\tilde{w},\sigma,\lambda)(\varphi))(k) = T_{\tilde{w}}((\mathcal{A}(P,\tilde{w},\sigma,\lambda)\varphi)(k)),\ \ k\in K, \varphi\in I(\sigma)$$

ne dépend du choix de $\tilde{w}$ et $T_{\tilde{w}}$ qu'à une constante muliplicative près. Elle se réduit à un scalaire indépendant de λ sur $I(\sigma)^{\mu_0}$. On choisit $T_{\tilde{w}}$ telle que cette constante soit égale à 1. La fonction méromorphe ainsi obtenue ne dépend que de w. On la note $\mathcal{A}(P,w,\sigma,\lambda)$. Elle vérifie:

(1.14) (i) Lorsque qu'il est défini, $\mathcal{A}(P,\tilde{w},\sigma,\lambda)$ entrelace $\pi^P(\sigma,\lambda)$ et $\pi^P(\tilde{w}\sigma, w\lambda)$. C'est une fonction rationnelle en $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. Si $w\in W_\sigma$, on a le même résultat en remplaçant $\tilde{w}$ par w.

(ii) Si $\lambda\in i\mathfrak{a}^*$, $\mathcal{A}(P,\tilde{w},\sigma,\lambda)$ est unitaire.
Si $w\in W_\sigma$, on a le même résultat en remplaçant $\tilde{w}$ par w.

(iii) Soit $\tilde{w},\tilde{w}'\in N_K(\mathfrak{a})$. Alors:

$$\mathcal{A}(P,\tilde{w}'\tilde{w},\sigma,\lambda) \equiv \mathcal{A}(P,\tilde{w}',\tilde{w}\sigma,\tilde{w}\lambda)\mathcal{A}(P,\tilde{w},\sigma,\lambda).$$

(iv) Soit $w, w'\in W_\sigma$. Alors:

$$\mathcal{A}(P,w'w,\sigma,\lambda) \equiv \mathcal{A}(P,w',\sigma,w\lambda)\mathcal{A}(P,w,\sigma,\lambda).$$

Références. (i) Résulte de (1.2) (i), (1.12) (i) et des définitions. Pour (ii), cf. [KSt, Prop. 8.6 (iii)]. Puis [KSt, Lemme 13.1], montre que l'égalité de (iv) est vraie à une constante multiplicative près. Mais les deux membres sont triviaux sur $I(\sigma)^{\mu_0}$. D'où l'on déduit le résultat.

Les résultats suivants font notamment le lien entre les différentes notions de R-groupe (cf. [KSt], [V1], [V2]).

(1.15) (i) Le groupe W^0_σ est le sous-groupe de W_σ formé des $w\in W_\sigma$ tel que $\mathcal{A}(P,w,\sigma,0)$ soit l'identité. Plus généralement pour $\lambda\in i\mathfrak{a}^*$, $W^0_{\sigma,\lambda} := W^0_\sigma\cap W(A)_\lambda$ est le sous-groupe de W_σ formé des $w\in W_{\sigma,\lambda} := W_\sigma \cap W(A)_\lambda$ tel que $\mathcal{A}(P,w,\sigma,\lambda)$ soit l'identité. Ici $W(A)_\lambda$ désigne le stabilisateur de λ dans $W(A)$.

(ii) Le groupe W^0_σ est un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{a}$ engendré par des réflexions.

Références. Pour (i), cf. [D2, Th. 1]. Pour (ii), cf. [KSt, Lemme 13.3 et Th. 3.4].

D'après [D2, Th. 1], on a aussi:

(1.16) (i) Pour $\gamma \in A(\sigma)$, le scalaire par lequel $\mathcal{A}(P, w, \sigma, \lambda)$ agit, lorsqu'il est défini, sur $I(\sigma)^\gamma$ est indépendant de $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ et de P et on le note $a^\gamma(w, \sigma)$. Pour $\delta, \gamma \in A(\sigma)$, on note $a^{\delta\gamma}(w, \sigma) = a^\delta(w, \sigma) a^\gamma(w, \sigma)^{-1}$.

(ii) L' application $w \mapsto a^{\delta\gamma}(w, \sigma)$ est un caractère de W_σ, trivial sur W^0_σ, donc passe au quotient en un élément $\hat{r}_{\delta\gamma}$ de $\hat{R}_\sigma$. C'est l'unique élément de $\hat{R}_\sigma$ vérifiant $\hat{r}_{\delta\gamma}\gamma = \delta$.

Montrons que:

(1.17) Si P, $Q \in \mathcal{P}(L)$ sont adjacents et si α est l'unique racine réduite de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}_P \cap \theta(\mathfrak{n}_Q)$, $\mathcal{A}(Q, P, \sigma, \lambda)$ ne dépend que de λ_α et est défini pour tout λ tel que $\operatorname{Re} \lambda_\alpha \geq 0$.

L'opérateur $A(Q, P, \sigma, \lambda)$ ne dépend que de λ_α (cf. (1.4)). Il en va de même de $a_0(Q, P, \sigma, \lambda)$ et donc de $\mathcal{A}(Q, P, \sigma, \lambda)$. Comme $a_0(Q, P, \sigma, \lambda)$ est non nul pour $\operatorname{Re} \lambda$ strictement P-dominant, d'après (1.10), il en résulte que $a_0(Q, P, \sigma, \lambda)$ est non nul avec la seule condition $\operatorname{Re} \lambda_\alpha > 0$. Il résulte des définitions que $\mathcal{A}(Q, P, \sigma, \lambda)$ est défini sous cette condition. Maintenant comme $\mathcal{A}(Q, P, \sigma, \lambda)$ ne dépend que de λ_α et qu'il est défini pour $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, il est aussi défini avec la seule condition $\operatorname{Re} \lambda_\alpha = 0$. Ceci achève de prouver (1.17).

1.5. *Dérivées de familles de représentations et de familles d'opérateurs d'entrelacement.* Rappelons des notions introduites dans [D4, Appendice B], pour les groupes p-adiques (cf. [DSou, Appendice A] pour le cas réel). Si $z \mapsto y(z)$ est une application holomorphe d'une variable complexe à valeurs dans un espace vectoriel V, on note $\frac{d}{dz}.y(z)$ l'application dans $V \oplus V$, $z \mapsto (\frac{d}{dz}y(z), y(z))$. On rappelle que si V n'a pas de topologie, on dit que y est holomorphe si elle est à valeurs dans un espace de dimension finie et holomorphe comme application à valeurs dans cet espace. Si V est muni d'une topologie, on demande que ce soit un espace de Fréchet de sorte qu'on peut utiliser les résultats de [Bou, §3.3].

Il est clair que:

(1.18) L'application $y(z)$ a un zéro d'ordre supérieur ou égal à $n+1$ en 0 si et seulement si $\frac{d^n}{dz^n}.y(z)$ a un zéro en 0.

Si $z \mapsto T(z)$ est une application d'une variable complexe à valeurs dans $\operatorname{End}(V)$, telle que pour tout $v \in V$, $z \mapsto T(z)v$ est holomorphe, on note $\frac{d}{dz}..T(z)$, l'endomorphisme de $V \oplus V$ défini par:

$$\frac{d}{dz}..T(z)(v_1, v_2) = \left(T(z)v_1 + \frac{d}{dz}(T(z)v_2), T(z)v_2 \right).$$

Si V est muni d'une topologie, on suppose que c'est un espace de Fréchet et qu' en outre l'application $(z, v) \mapsto T(z)v$ soit continue. On établit facilement que

$\frac{d}{dz}..T(z)$ vérifie les mêmes hypothèses que $T(z)$: on remarque que localement en z les opérateurs $T(z)$ sont équicontinus, d'après le Théorème de Banach-Steinhaus, d'où l'on déduit que ceci est vrai aussi pour $\frac{d}{dz}..T(z)$, par utilisation de la formule de Cauchy. On conclut en utilisant la formule:

$$T'(z)v - T'(z_0)v_0 = T'(z)(v - v_0) + (T'(z) - T'(z_0))v_0$$

et en utilisant l'holomorphie de $T'(z)v_0$. Ici on a noté $T'(z)v$ pour la dérivée de $z \mapsto T(z)v$. On a:

$$\frac{d}{dz}.T(z)y(z) = \left(\frac{d}{dz}..T(z)\right)\left(\frac{d}{dz}.y(z)\right). \tag{1.19}$$

Supposons que l'on ait une famille de représentations de G ou de $(\mathfrak{g}, K)$-modules dépendant d'un paramètre complexe z, dans un espace fixe V, $\pi(z)$, telle que l'action de K soit indépendante de z. On dit que la famille est holomorphe si pour tout $v \in V$ et x, K, ou $\mathfrak{g}$, $z \mapsto (\pi(z)(x))v$ est holomorphe et si V est un muni d'une topologie, on demande que ce soit un espace de Fréchet et que, pour tout $x \in G$, l'application $(z, v) \mapsto (\pi(z)(x))v$ soit continue. Alors $\frac{d}{dz}..\pi(z)$ définit une famille holomorphe de représentations de G ou de $(\mathfrak{g}, K)$-modules dans $V \oplus V$.

Si $\pi_1(z)$ est une autre famille holomophe de représentations de G ou de $(\mathfrak{g}, K)$-modules dans V et $A(z)$ est une famille holomorphe d'opérateurs d'entrelacement entre $\pi(z)$ et $\pi_1(z)$ (i.e. telle que pour tout $v \in V$, $z \mapsto A(z)v$ soit holomorphe et telle que , si V a une topologie, $(z, v) \mapsto A(z)v$, soit continue) alors $\frac{d}{dz}..A(z)$ est une famille holomorphe d'opérateurs d'entrelacement entre $\frac{d}{dz}..\pi(z)$ et $\frac{d}{dz}..\pi_1(z)$, qui vérifie les mêmes propriétés que $A(z)$.

On peut itérer ce processus de dérivation. Lorsque que l'on a des familles dépendant de plusieurs paramètres complexes, on peut prendre des dérivées partielles successives. Les familles de représentations ou les représentations ainsi obtenues seront encore appelées dérivées successives de la famille.

Rappelons un résultat récent (cf. [DSou]) qui fait suite au travail de S. Souaifi [Sou]. Ce dernier est un analogue local de résultats de J. Franke sur certaines filtrations d'espaces de formes automorphes (cf. e.g. [W]).

(1.20) Soit V un $(\mathfrak{g}, K)$-module de Harish-Chandra, i.e. un $(\mathfrak{g}, K)$-module de longueur finie dont tous les K-types contenus dans V sont de longueur supérieure ou égale à t. Alors V est un sous-quotient d'une somme finie de dérivées successives de séries principales généralisées, $\pi^{P_i}(\sigma_i, \lambda_i)$, où pour tout i, $P_i = M_iA_iN_i \in \mathcal{P}_{st}$, $\sigma_i \in (\hat{M}_i)_d$, $\lambda_i \in (\mathfrak{a}_i)^*_{\mathbb{C}}$ et tous les K-types contenus dans $I(\sigma_i)$ sont de longueur supérieure ou égale à t.

On remarquera qu'une dérivée successive de $\pi^{P_i}(\sigma_i, \lambda_i)$ est une repésentation induite à partir de représentations de P_i, triviale sur N_i et égale, comme représentations de M_iA_i, au produit tensoriel de σ_i par une représentation de dimension finie de A_i dont tous les sous-quotients irréductibles sont des représentations de différentielle λ_i (cf. [DSou, Lemme A.1 (iv)]).

1.6. *Un résultat de division.* Si $\mathfrak{a}$ est un espace vectoriel réel euclidien. On note $\mathcal{PW}_r(\mathfrak{a})$ l'espace des transformées de Fourier de fonctions C^∞, à support dans la boule fermée de rayon r. Plus précisément, c'est l'espace des fonctions entières sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, ϕ, telles que pour tout n,

$$p_{r,n}(\phi) := \mathrm{Sup}_{\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}} e^{-r\|\mathrm{Re}\,\lambda\|}(1+\|\lambda\|)^n|\phi(\lambda)|$$

est fini. Il résulte de [E, Th. 1.4, p. 8] (cf. aussi [CD2, Lemme B.1 (ii)]), que:

(1.21) Soit $f \in \mathcal{PW}_r(\mathfrak{a})$ et $p \in S(\mathfrak{a})$ regardé comme fonction polynômiale sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. Alors, si p divise f comme fonction holomorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, le quotient est élément de $\mathcal{PW}_r(\mathfrak{a})$.

On utilisera aussi la propriété suivante: Soit f, g, h des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$. On suppose f divisible comme fonction holomorphe par g et h et que l'intersection de l'ensemble des zéros de g et h est contenu dans un sous-espace affine de codimension 2. Alors f est divisible par gh.

En effet on voit facilement que nos hypothèses impliquent que f/gh est holomorphe sur le complémentaire de l'intersection de l'ensemble des zéros de g et h. Notre assertion résulte alors de [CassM, Lemme A.1.8], qui est une version simple du Théorème d'extension d'Hartog.

1.7. *Premières propriétés des transformées de Fourier des fonctions C^∞, à support compact.* On note $\mathbb{H}(G,K)$ (resp. $\mathcal{H}(G,K)$) l'algèbre de convolution des distributions sur G, K-finies à gauche et à droite et à support dans K (resp. des fonctions C^∞ sur G, à support compact et K-finies à gauche et à droite). Ce sont des $(\mathfrak{g}, K)$-modules pour les actions régulières droite et gauche. On identifie tout élément χ de $C^\infty(K)$ à la distribution χdk, où dk est la mesure de Haar sur K de masse totale 1. On note $\mathbb{H}(K)$ l'algèbre des distributions K-finies à droite et à gauche sur K, qui s'identifie donc à l'espace des fonctions K-finies à droite et à gauche sur K. L'algèbre enveloppante $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$ s'identifie aux distributions sur G de support l'élément neutre. Alors (cf. [KV, Cor. 1.71, Prop. 1.83]):

$$\mathbb{H}(G,K) = \mathbb{H}(K) \star \mathbb{U}(\mathfrak{g}) = \mathbb{U}(\mathfrak{g}) \star \mathbb{H}(K). \tag{1.22}$$

On note $\mathcal{H}_r(G,K)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}(G,K)$ à support contenu dans $B_r := \{k(\exp X)k' | k, k' \in K,\ X \in \mathfrak{a}_m,\ \|X\| \le r\}$.

Soit χ_δ le complexe conjugué du caractère de $\delta \in \hat{K}$ multiplié par la dimension de δ, de sorte que $\chi_\delta \star \chi_\delta = \chi_\delta$ dans $\mathbb{H}(K)$. En outre, si π est représentation continue de K dans un espace de Fréchet, $\pi(\chi_\delta)$ est le projecteur sur la composante isotypique de type δ parallèlement à la somme des autres.

Si $\delta, \gamma \in \hat{K}$, et $H = \mathbb{H}$, resp. $\mathcal{H}_r$, on note $H(G,K)^{\delta\gamma} = \chi_\delta \star H(G,K) \star \chi_\gamma$. Alors, on a:

$$H(G,K) = \oplus_{\delta,\gamma\in\hat{K}} H(G,K)^{\delta\gamma}. \tag{1.23}$$

Si V est un $(\mathfrak{g}, K)$-module (resp. le $(\mathfrak{g}, K)$-module d'un G-module C^∞ dans un espace de Fréchet), c'est naturellement un $\mathbb{H}(G,K)$-module (resp. $\mathcal{H}(G,K)$-module) et les sous-modules sont les mêmes pour les deux notions. En outre si V^γ est la composante isotypique de type $\gamma \in \hat{K}$ de V, on a, pour $\delta \in \hat{K}$:

$$(H(G,K)V^\gamma)^\delta = H(G,K)^{\delta\gamma} V. \tag{1.24}$$

On a:

(1.25) Soit $L = MA \in \mathcal{L}$, $P \in \mathcal{P}(L)$, $\sigma \in \hat{M}_d$. Soit $g \in B_r$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. Alors la norme $\|\pi^P(\sigma,\lambda)(g)\|$ de $\pi^P(\sigma,\lambda)(g)$ vu comme opérateur dans l'espace de Hilbert $I^2(\sigma)$ vérifie:

$$\|\pi^P(\sigma,\lambda)(g)\| \le e^{r\|\mathrm{Re}\,\lambda\|}.$$

Référence. La preuve de ce résultat pour les groupes à une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan ([D1, Lemme 8]) s'étend immédiatement à notre cas.

Soit T un sous-groupe de Cartan compact de M, qui existe puisqu'on suppose $\hat{M}_d$ non vide. On note $\Lambda_\sigma \in i\mathfrak{t}^*$ un paramètre d'Harish-Chandra du caractère infinitésimal de σ. On note $\mathfrak{j} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ et $W(\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$.

LEMME 1. *Soit u, $v \in U(\mathfrak{g})$, $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$. Il existe une semi-norme continue, p, sur l'espace $\mathcal{D}_r(G)$ des $h \in C_c^\infty(G)$ à support compact contenu dans B_r, telle que*:

$$\|\pi^P(\sigma,\lambda)(u \star h \star v)\| \le p(h)(1 + \|\Lambda_\sigma\|^2 + \|\lambda\|^2)^{-n} e^{r\|\mathrm{Re}\,\lambda\|},\ \ h \in \mathcal{D}_r(G).$$

Démonstration. On se ramène à $u = v = 1$, car la convolution à gauche ou à droite par un élément de $\mathbb{U}(\mathfrak{g})$ est une opération continue dans $\mathcal{D}_r(G)$. Pour $n = 0$, l'inégalité voulue résulte de (1.25). On note p_0 la semi-norme correspondante. On a donc:

$$\|\pi^P(\sigma,\lambda)(u \star h \star v)\| \le p_0(h) e^{r\|\mathrm{Re}\,\lambda\|},\ \ h \in \mathcal{D}_r(G). \tag{1.26}$$

D'après [D1, Lemme 9], il existe $Q_1, \ldots, Q_l \in S(\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})^{W(\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})}$ tels que:

$$(1 + \|\nu\|^2)^n \le |Q_1(\nu)| + \cdots + |Q_l(\nu)|,\ \nu \in \mathfrak{j}^*_{\mathbb{C}}. \tag{1.27}$$

On note $z_1, \ldots, z_l$, les éléments de $Z(\mathfrak{g})$ ayant $Q_1, \ldots, Q_l$, comme image par l'homomorphisme d'Harish-Chandra. Appliquant (1.26) à $z_i h$, on obtient l'existence d'une semi-norme continue sur $\mathcal{D}_r(G)$, p_i, telle que:

$$|Q_i(\Lambda_\sigma + \lambda)| \|\pi^P(\sigma,\lambda)(u \star h \star v)\| \le p_i(h) e^{r\|\mathrm{Re}\,\lambda\|},\ \ h \in \mathcal{D}_r(G).$$

On obtient l'inégalité voulue en sommant sur i et tenant compte de (1.27). $\square$

Soit $h \in \mathbb{H}(G,K)^{\delta\gamma}$ (resp. $\mathcal{H}_r(G,K)^{\delta\gamma}$). Alors, avec les notations qui précèdent, pour $\sigma \in \hat{M}_d$:

(1.28) L'application de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ dans $\mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, I(\sigma)^\delta)$, $\lambda \mapsto \pi^P(\sigma,\lambda)(h)$ est polynômiale en λ (resp. holomorphe) et définit un élément de $S(\mathfrak{a}) \otimes \mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, I(\sigma)^\delta)$ (resp. $\mathcal{PW}_r(\mathfrak{a}) \otimes \mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, I(\sigma)^\delta)$).

Pour $\mathbb{H}$ cf. e.g. [D2, Prop. 1] et pour $\mathcal{H}_r$, cela résulte du Lemme précédent.

On fait agir $N_K(\mathfrak{a}_{\min})$ sur les couples $(L = MA, \sigma)$, où $L \in \mathcal{L}$ et $\sigma \in \hat{M}_d$.

Soit ω une orbite de $N_K(\mathfrak{a}_{\min})$ sur use classe d'équivalence d'élements de $\hat{M}_d$. Pour δ, $\gamma \in \hat{K}$, on note $\mathbf{I}_\omega^{\delta\gamma}$ l'ensemble des applications ϕ, qui à $(L = MA, \sigma) \in \omega$, $P \in \mathcal{P}(L)$, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ associe $\phi(P,\sigma,\lambda) \in \mathrm{Hom}(I^\gamma(\sigma), I^\delta(\sigma))$, telles que, pour tout $(L,\sigma) \in \omega$, $P, Q \in \mathcal{P}(L)$, $w \in N_K(\mathfrak{a})$:

(1.29) L'application $\lambda \mapsto \phi(P,\sigma,\lambda)$ est élément de $S(\mathfrak{a}) \otimes \mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, I(\sigma)^\delta)$ si $\mathbf{I} = \mathbb{I}$ (resp. $\mathcal{PW}_r(\mathfrak{a}) \otimes \mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, I(\sigma)^\delta)$ si $\mathbf{I} = \mathcal{I}_r$),

$$\mathcal{A}^\delta(Q,P,\sigma,\lambda)\phi(P,\sigma,\lambda) \equiv \phi(Q,\sigma,\lambda)\mathcal{A}^\gamma(Q,P,\sigma,\lambda), \;\; P,Q \in \mathcal{P}(L), \tag{1.30}$$

$$R(w)^{-1}\phi(wPw^{-1}, w\sigma, \lambda)R(w) \equiv \phi(P,\sigma,\lambda), \;\; w \in N_K(\mathfrak{a}) \tag{1.31}$$

et si σ, σ' sont entrelacés par T, $\phi(P,\sigma,\lambda)$ et $\phi(P,\sigma',\lambda)$ sont entrelacés par l'opérateur d'entrelacement induit $\mathrm{ind}\, T$.

Noter que (1.30) et (1.31) impliquent:

$$\mathcal{A}^\delta(P,w,\sigma,\lambda)\phi(P,\sigma,\lambda) \equiv \phi(P,\sigma,w\lambda)\mathcal{A}^\gamma(P,w,\sigma,\lambda), \;\; w \in W_\sigma. \tag{1.32}$$

Notation pour la suite de l'article. *Dans la suite on rencontrera des définitions notations faisant intervenir les lettres H, F et* $\mathbf{I}$*. Dans celles-ci H désignera $\mathbb{H}$ ou $\mathcal{H}_r$, F désignera $\mathbb{F}$ ou $\mathcal{F}_r$,* $\mathbf{I}$ *désignera $\mathbb{I}$ ou $\mathcal{I}_r$. Si H désigne $\mathbb{H}$, F désignera $\mathbb{F}$,* $\mathbf{I}$ *désignera $\mathbb{I}$. Si H désigne $\mathcal{H}_r$, F désignera $\mathcal{F}_r$,* $\mathbf{I}$ *désignera $\mathcal{I}_r$.*

(1.33) On identifie $\mathrm{Hom}(I^\gamma(\sigma), I^\delta(\sigma))$ à l'espace des endomorphismes de $I(\sigma)$ à valeurs dans $I(\sigma)^\delta$ et nuls sur $I(\sigma)^\mu$, pour tout $\mu \in \hat{K}$ distinct de γ. Pour tout $h \in H(G,K)$, $(L,\sigma) \in \omega$, $P \in \mathcal{P}(L)$, on note:

$$\hat{h}(P,\sigma,\lambda) = \pi^P(\sigma,\lambda)(h), \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*.$$

On note $F_\omega^{\delta\gamma}$ l'ensemble des applications ϕ, qui à $(L = MA, \sigma) \in \omega$, $P \in \mathcal{P}(L)$, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ associe $\phi(P,\sigma,\lambda) \in \mathrm{Hom}(I^\gamma(\sigma), I^\delta(\sigma))$ pour lesquelles il existe $h \in H(G,K)^{\delta\gamma}$ vérifiant:

$$\phi(P,\sigma,\lambda) \equiv \hat{h}(P,\sigma,\lambda).$$

Les propriétés des opérateurs d'entrelacement montrent que:

$$F_\omega^{\delta\gamma} \subset \mathbf{I}_\omega^{\delta\gamma}. \tag{1.34}$$

Par ailleurs, on a:

(1.35) Pour $\gamma, \delta, \varepsilon \in \hat{K}$:

$$\mathbb{H}(G,K)^{\varepsilon\delta} \star H(G,K)^{\delta\gamma}(\text{resp.} \quad H(G,K)^{\varepsilon\delta} \star \mathbb{H}(G,K)^{\delta\gamma}) \subset H(G,K)^{\varepsilon\gamma}$$
$$\mathbb{F}(G,K)^{\varepsilon\delta} F(G,K)^{\delta\gamma}(\text{resp.} \quad F(G,K)^{\varepsilon\delta} \mathbb{F}(G,K)^{\delta\gamma}) \subset F(G,K)^{\varepsilon\gamma}$$

où dans la deuxième série d'inclusions, le produit est défini à l'aide du produit des opérateurs.

Si $(L = MA, \sigma) \in \omega$, $P \in \mathcal{P}(L)$, on note $F_\sigma^{\delta\gamma}$ (resp. $F_{P,\sigma}^{\delta\gamma}$) l'ensemble des restrictions de $F_\omega^{\delta\gamma}$ aux triplets (Q, σ, λ), où $Q \in \mathcal{P}(L)$ (resp. $Q = P$) et $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. On définit de même $\mathbf{I}_\sigma^{\delta\gamma}$ et $\mathbf{I}_{P,\sigma}^{\delta\gamma}$.

L'opération de restriction est injective grâce à (1.30) et (1.31), car les intégrales d'entrelacement sont génériquement injectives (cf. (1.2) (iii)).

Comme W_σ^0 est un sous-groupe distingué de W_σ, le groupe $R_\sigma = W_\sigma / W_\sigma^0$ agit sur $S(\mathfrak{a})^{W_\sigma^0}$. Si $\hat{r} \in \hat{R}_\sigma$, on note $(S(\mathfrak{a})^{W_\sigma^0})^{\hat{r}}$ la composante isotypique correspondant à $\hat{r}$. Rappelons le résultat principal de [D2].

(1.36) Soit δ, $\gamma \in A(\sigma)$. On rappelle que $\hat{r}_{\delta\gamma}$ est l'unique élément de $\hat{R}_\sigma$ tel que $\hat{r}_{\delta\gamma}\gamma = \delta$. Alors on a:

$$\mathbb{F}_{P,\sigma}^{\delta\gamma} = (S(\mathfrak{a})^{W_\sigma^0})^{\hat{r}_{\delta\gamma}} \otimes \operatorname{Hom}(I^\gamma(\sigma), I^\delta(\sigma)).$$

Cela résulte en effet du Théorème 3 de l.c. joint à la Proposition 3 (iii), étant entendu qu'on utilise la version généralisée de ces résultats (cf. Remarque 1).

Comme ci-dessus, on note $\Lambda_\sigma \in i\mathfrak{t}^*$ un paramètre d'Harish-Chandra du caractère infinitésimal de σ. Alors on a, grâce aux Lemme 7, 8 de [CD1], toujours généralisés à notre situation grâce à la Remarque 1, où l'on peut remplacer W_σ par W_σ^0 (voir aussi [Co]):

$$\{\lambda \mapsto \phi(\Lambda_\sigma + \lambda), \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* | \phi \in S(\mathfrak{a})^{W_\sigma^0} \mathcal{PW}_r^{W(\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})}\} = \mathcal{PW}_r^{W_\sigma^0}. \tag{1.37}$$

Le résultat suivant est une extension de [CD1, Prop. 1]. Nous en donnerons une démonstration simple utilisant [DF-J, Th. 2] au lieu de [D3].

Pour δ, $\gamma \in A(\sigma)$, on a:

$$\mathcal{F}_{r,P,\sigma}^{\delta\gamma} = (\mathcal{PW}_r(\mathfrak{a})^{W_\sigma^0})^{\hat{r}_{\delta\gamma}} \otimes \operatorname{Hom}(I^\gamma(\sigma), I^\delta(\sigma)). \tag{1.38}$$

D'après (1.34), (1.32) et la définition de $\hat{r}_{\delta\gamma}$ (cf. (1.16)), le membre de gauche de cette égalité est contenu dans le membre de droite. Montrons que tout élément du membre de droite est élément du membre de gauche. Par linéarité on peut supposer cet élément de la forme $F(\lambda)T$, où $T \in \operatorname{Hom}(I^\gamma(\sigma), I^\delta(\sigma))$, $F \in (\mathcal{PW}_r(\mathfrak{a})^{W_\sigma^0})^{\hat{r}_{\delta\gamma}}$.

D'après (1.37), on peut supposer, par linéarité, F de la forme $F(\lambda) = p(\lambda)F_1(\Lambda_\sigma + \lambda)$, où $p \in (S(\mathfrak{a})^{W_\sigma^0})^{\hat{r}_{\delta\gamma}}$ et $F_1 \in \mathcal{PW}_r^{W(\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})}$. D'après (1.36), il existe $u \in \mathbb{H}(G,K)^{\delta\gamma}$ tel que:

$$\pi_{\sigma,\lambda}^P(u)^{\delta\gamma} = p(\lambda)T, \ \ \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*.$$

Montrons qu' il existe $h \in \mathcal{H}_r(G,K)^{\gamma\gamma}$ tel que:

$$\pi^P_{\sigma,\lambda}(h)^{\gamma\gamma} = F_1(\Lambda_\sigma + \lambda), \ \ \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}.$$

En effet, d'après [DF-J, Th. 2], si $\gamma_0 \in \hat{K}^0$, il existe $h_{\gamma_0} \in \mathcal{H}_r(G^0,K^0)^{\gamma_0\gamma_0}$ tel que, pour tout $(\mathfrak{g},K^0)$-module, (π,V), de longueur finie, admettant un caractère infinitésimal de paramètre d'Harish-Chandra $\Lambda_\pi \in \mathfrak{j}^*_{\mathbb{C}}$ on ait:

$$\pi(h_{\gamma_0})^{\gamma_0\gamma_0} = F_1(\Lambda_\pi).$$

Alors:

$$h := \chi_\gamma \star \left(\sum_{\gamma_0 \in \hat{K}^0, \gamma_0 \text{ contenue dans } \gamma_{|K^0}} h_{\gamma_0} \right) \star \chi_\gamma$$

a les propriétés voulues.

Finalement:

$$\pi^P_{\sigma,\lambda}(u \star h)^{\gamma\gamma} = F(\lambda)T, \ \ \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}.$$

Ceci montre que l'élément considéré du membre de droite de (1.38) appartient au membre de gauche. Ceci achève de prouver (1.38).

2. Enoncé et démonstration de la Proposition 1

2.1. *Compléments sur les opérateurs d'entrelacement.*

Lemme 2. *Soit $P,Q \in \mathcal{P}(MA)$, $\sigma \in \hat{M}_d$, $w \in N_K(\mathfrak{a})$ ou W_σ. On définit pour $\delta \in \hat{K}$:*

$$a^\delta(Q,P,\sigma,\lambda) := \det \mathcal{A}^\delta(Q,P,\sigma,\lambda), a^\delta(P,w,\sigma,\lambda) := \det \mathcal{A}^\delta(P,w,\sigma,\lambda), \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$$

où $\mathcal{A}^\delta(Q,P,\sigma,\lambda)$ est la restriction de $\mathcal{A}(Q,P,\sigma,\lambda)$ à $I(\sigma)^\delta$ regardée comme endomorphisme de cet espace (idem pour $\mathcal{A}^\delta(P,w,\sigma,\lambda)$). Si $w \in N_K(\mathfrak{a})$, le déterminant dépend d'un choix d'isomorphisme unitaire de K-modules entre $I(\sigma)^\delta$ et $I(w\sigma)^\delta$. Si $w \in W_\sigma$, le déterminant ne nécessite pas de choix. Alors:

(i) *Si P,Q sont adjacents et α est la racine réduite de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}_P \cap \theta(\mathfrak{n}_Q)$, il existe $c \in \mathbb{C}$, de module 1, et un unique polynôme d'une variable complexe, $b^\delta_\alpha(\sigma,.)$ valant 1 en 0, tels que*:

$$a^\delta(Q,P,\sigma,\lambda) = c\frac{b^\delta_\alpha(\sigma,\lambda_\alpha)}{\overline{b}^\delta_\alpha(\sigma,-\lambda_\alpha)}$$

où $b^\delta_\alpha(\sigma,.)$ et $\overline{b}^\delta_\alpha(\sigma,.)$ sont premiers entre eux et $b^\delta_\alpha(\sigma,z)$ n'a pas de zéros pour $\operatorname{Re} z \leq 0$.

Ici, si p est un polynôme sur $\mathbb{C}$, $\overline{p}$ désigne le polynôme vérifiant:

$$\overline{p}(z) = \overline{p(\overline{z})}, \ z \in \mathbb{C}.$$

(ii) *De plus*:

$$b^{\delta}_{-\alpha}(\sigma, z) = \overline{b}^{\delta}_{\alpha}(\sigma, -z), \ \ z \in \mathbb{C}.$$

(iii) *Soit* $w \in N_K(\mathfrak{a})$ (*resp.* $N_K(\mathfrak{a}_m)$, W^G). *Notant* $b^{\delta}_{\alpha}(\sigma, \lambda) := b^{\delta}_{\alpha}(\sigma, \lambda_{\alpha})$, *on a*:

$$b^{\delta}_{w\alpha}(w\sigma, w\lambda) = b^{\delta}_{\alpha}(\sigma, \lambda), \ \ \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}.$$

(iv) *Si* P, Q *ne sont pas nécessairement adjacents, il existe une constante* $c^{\delta}(Q, P, \sigma)$ *de module* 1 *telle que*:

$$a^{\delta}(Q, P, \sigma, \lambda) = c^{\delta}(Q, P, \sigma) \prod_{\alpha \in \Delta^+_P \cap -\Delta^+_Q} \frac{b^{\delta}_{\alpha}(\sigma, \lambda)}{\overline{b}^{\delta}_{\alpha}(\sigma, -\lambda)}, \ \ \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}.$$

(v) *Soit* $w \in N_K(\mathfrak{a})$ *ou* W_{σ}. *On note* $S(w)$ *l'ensemble des* $\alpha \in \Delta^+_P$ *telles que* $w^{-1}\alpha \in -\Delta^+_P$. *Il existe une constante de module* 1, $c^{\delta}(P, w, \sigma)$ *telle que l'on ait l'identité de fractions rationnelles sur* $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$a^{\delta}(P, w, \sigma, \lambda) = c^{\delta}(P, w, \sigma) \prod_{\alpha \in S(w)} \frac{b^{\delta}_{\alpha}(\sigma, \lambda)}{\overline{b}^{\delta}_{\alpha}(\sigma, -\lambda)}, \tag{2.1}$$

$$a^{\delta}(P, w, \sigma, \lambda) = c^{\delta}(P, w, \sigma) \prod_{\alpha \in \Delta^+_P} \frac{b^{\delta}_{\alpha}(\sigma, \lambda)}{b^{\delta}_{\alpha}(w\sigma, w\lambda)}, \tag{2.2}$$

$$a^{\delta}(P, w, \sigma, \lambda) = c^{\delta}(P, w, \sigma) \prod_{\alpha \in \Delta^+_P} \frac{\overline{b}^{\delta}_{\alpha}(w\sigma, -w\lambda)}{\overline{b}^{\delta}_{\alpha}(\sigma, -\lambda)}. \tag{2.3}$$

(vi) *L'application* $w \mapsto c^{\delta}(P, w, \sigma)$ *est un caractère de* W_{σ}, *trivial sur* W^0_{σ}.

Démonstration. On se ramène pour prouver (i) et (ii), au cas où P est un sous-groupe parabolique maximal grâce à (1.4). Dans le cas où P est un sous-groupe parabolique maximal, (i) est une conséquence immédiate de (1.12) (i), (v), et du fait suivant:

(2.4) Soit $a(z)$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$, définie pour $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ et de module 1 pour $z \in i\mathbb{R}$. Alors $a(z) = cp(z)/\overline{p}(-z)$ où c est un nombre complexe de module 1, $p(z)$ est un polynôme premier avec $\overline{p}(-z)$, avec $p(0) = 1$. En outre $p(z)$ n'a pas de zéros pour $\mathrm{Re} z \leq 0$.

Montrons (2.4). Ecrivons $a(z) = p(z)/q(z)$, avec p et q polynômes premiers entre eux. Comme $a(0)$ est défini et de module 1, on peut supposer $p(0) = 1$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}$, l'hypothèse $|a(ix)| = 1$ conduit à:

$$p(ix)/q(ix) = \overline{q}(-ix)/\overline{p}(-ix), \ x \in \mathbb{R}.$$

Soit encore:

$$p(z)\overline{p}(-z) = q(z)\overline{q}(-z), \ \ z \in \mathbb{C}.$$

Comme p et q sont premiers entre eux, il en va de même de $\overline{p}$ et $\overline{q}$. Alors $p(z)$ divise $\overline{q}(-z)$, $q(z)$ divise $\overline{p}(-z)$ et pour des raisons de degré, on a:

$$p(z) = \tau\overline{q}(-z), \overline{p}(-z) = \tau' q(z),\ z \in \mathbb{C}$$

avec $\tau, \tau' \in \mathbb{C}$ et $\tau\tau' = 1$. Alors $q(z) = \tau\overline{p}(-z)$. Finalement $a(z) = cp(z)/\overline{p}(-z)$ avec $c = \tau^{-1}$. Comme $a(0)$ est de module 1 et $p(0) = 1$, c est bien de module 1.

Montrons (ii). Tenant compte de (1.12) (iii), on a:

$$b^{\delta}_{-\alpha}(\sigma, \lambda_\alpha)/\overline{b}^{\delta}_{-\alpha}(\sigma, -\lambda_\alpha) = (b^{\delta}_{\alpha}(\sigma, -\lambda_\alpha)/\overline{b}^{\delta}_{\alpha}(\sigma, \lambda_\alpha))^{-1}$$

soit encore:

$$b^{\delta}_{-\alpha}(\sigma, \lambda_\alpha) b^{\delta}_{\alpha}(\sigma, -\lambda_\alpha) = \overline{b}^{\delta}_{-\alpha}(\sigma, -\lambda_\alpha)\overline{b}^{\delta}_{\alpha}(\sigma, \lambda_\alpha).$$

Comme $b^{\delta}_{-\alpha}(\sigma, z)$ et $\overline{b}^{\delta}_{-\alpha}(\sigma, -z)$ sont premiers entre eux, $b^{\delta}_{-\alpha}(\sigma, z)$ divise $\overline{b}^{\delta}_{\alpha}(\sigma, z)$ et de même $b^{\delta}_{\alpha}(\sigma, -z)$ divise $\overline{b}^{\delta}_{-\alpha}(\sigma, -z)$. Pour des raisons de degré on a:

$$b^{\delta}_{-\alpha}(\sigma, z) = c\overline{b}^{\delta}_{\alpha}(\sigma, z), \text{ où } c \in \mathbb{C}.$$

Evaluant en 0, on déduit $c = 1$, ce qui achève de prouver (ii).

(iii) résulte d'un simple transport de structure.

(iv) résulte des propriétés des opérateurs d'entrelacement normalisés (cf. [KSt, Th. 7.6 (i) et Lemme 8.3 (ii)]). (2.1) résulte de (iv), de (1.12) (iv) et de la définition des opérateurs d'entrelacements $\mathcal{A}(P, w, \sigma, \lambda)$ (cf. §1). Soit $\alpha \in \Delta^{+}_{P}$. Si $\alpha \notin S(w)$, $w\alpha$ est élément de Δ^{+}_{P} et, d'après (1.12) (iii):

$$b^{\delta}_{w\alpha}(w\sigma, w\lambda) = b^{\delta}_{\alpha}(\sigma, \lambda).$$

Le terme du numérateur du membre de droite de (2.2) correspondant à α se simplifie avec celui du dénominateur correspondant à $w\alpha$. Par ailleurs si $\alpha \in S(w)$, $-w\alpha$ est élément de Δ^{+}_{P} et, d'après (ii) et (iii),

$$b^{\delta}_{-w\alpha}(w\sigma, w\lambda) = b^{\delta}_{-\alpha}(\sigma, \lambda) = \overline{b}^{\delta}_{\alpha}(\sigma, -\lambda).$$

Tenant compte de (2.1), l'égalité (2.2) en résulte.

Montrons (2.3). Soit $\alpha \in \Delta^{+}_{P}$. Si $\alpha \notin S(w^{-1})$, $\beta = w^{-1}\alpha$ est élément de Δ^{+}_{P}. Alors, d'après (iii):

$$b^{\delta}_{\alpha}(w\sigma, -w\lambda)/b^{\delta}_{\beta}(\sigma, -\lambda) = 1.$$

Sinon $\alpha \in S(w^{-1})$ et $\beta = -w^{-1}\alpha$ est élément de Δ^{+}_{P}. Alors, d'après (iii) , on a:

$$b^{\delta}_{\alpha}(w\sigma, -w\lambda)/b^{\delta}_{\beta}(\sigma, -\lambda) = b^{\delta}_{-\beta}(\sigma, \lambda)/b^{\delta}_{\beta}(\sigma, -\lambda).$$

On conclut grâce à l'idendité (2.1) et au fait que $w^{-1}S(w^{-1}) = S(w)$. Ceci achève de prouver (v).

Montrons (vi). On étudie les opérateurs d'entrelacements en $\lambda = 0$. D'après (1.14) (iv), $w \mapsto \mathcal{A}(P, w, \sigma, 0)$ est un morphisme de W_σ dans le groupe des opérateurs inversibles de $I(\sigma)$, trivial sur W_σ^0. Comme les polynômes b valent 1 en 0, (vi) en résulte immédiatement. $\square$

2.2. *Propriétés des fonctions Φ et Φ'.* On fixe $\delta \in \hat{K}$. Soit ω comme ci-dessus $(L = MA, \sigma) \in \omega$ et $P \in \mathcal{P}(L)$. On note $l = \dim I(\sigma)^\delta$. On choisit $\mu_1, \ldots, \mu_l$, des K-types minimaux, non nécessairement distincts, de $I(\sigma)$, $v_i \in I(\sigma)^{\mu_i}$, de normes 1, $\phi_i \in \mathbb{I}_\omega^{\delta\mu_i}$ pour $i = 1, \ldots, l$. On note $V = \oplus_i \mathbb{C} v_i$. On définit, pour $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, $\Phi(P, \sigma, \lambda) \in \mathrm{Hom}(V, I(\sigma)^\delta)$ par:

$$\Phi(P, \sigma, \lambda)(v_i) = \phi_i(P, \sigma, \lambda)(v_i). \tag{2.5}$$

On note $s = \dim I(\sigma)^\gamma$. On choisit $\mu'_1, \ldots, \mu'_s$, des K-types minimaux de $I(\sigma)$ non nécessairement distincts, $v'_j \in I(\sigma)^{\mu'_j}$, de normes 1, $\phi'_j \in \mathbb{I}_\omega^{\mu'_j\gamma}$ pour $j = 1, \ldots, s$. On note $V' = \oplus_j \mathbb{C} v'_j$. On définit en utilisant les coordonnées données par les v'_j, pour $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, $\Phi'(P, \sigma, \lambda) \in \mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, V')$ par:

$$(\Phi'(P, \sigma, \lambda)(\varphi)) = \sum_{j=1,\ldots s} (\phi'_j(P, \sigma, \lambda)(\varphi) | v'_j) v'_j,\ \varphi \in I(\sigma)^\gamma. \tag{2.6}$$

Lemme 3. *Par un choix de base orthonormée de $I(\sigma)^\delta$ (resp. $I(\sigma)^\gamma$), $\Phi(P, \sigma, \lambda)$ (resp. $\Phi'(P, \sigma, \lambda)$) apparait comme une matrice carrée (l, l) (resp. (s, s)) dont on peut calculer le déterminant. Alors*:

(i) *il existe une unique fonction, polynômiale en $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, $\Psi(P, \sigma, \lambda)$ (resp. $\Psi'(P, \sigma, \lambda)$) telle que*:

$$\det \Phi(P, \sigma, \lambda) = \Psi(P, \sigma, \lambda) \prod_{\alpha \in \Delta_P^+} \overline{b}_\alpha^\delta(\sigma, -\lambda), \tag{2.7}$$

$$\det \Phi'(P, \sigma, \lambda) = \Psi'(P, \sigma, \lambda) \prod_{\alpha \in \Delta_P^+} b_\alpha^\gamma(\sigma, \lambda). \tag{2.8}$$

(ii) *Si $Q \in \mathcal{P}(L)$, il existe une constante non nulle $c(Q, P, \Phi, \sigma) \in \mathbb{C}$, telle que*:

$$\Psi(Q, \sigma, \lambda) = c(Q, P, \sigma, \Phi) \Psi(P, \sigma, \lambda),\ \ \lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*. \tag{2.9}$$

(iii) *Si $w \in W_\sigma$, il existe une constante non nulle $c(P, w, \sigma, \Phi)$ telle que*:

$$\Psi(P, \sigma, w\lambda) = c(P, w, \sigma, \Phi) \Psi(P, \sigma, \lambda),\ \ \lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*. \tag{2.10}$$

De plus, l'application $w \mapsto c(P, w, \sigma, \Phi)$ est un caractère de $R_\sigma = W_\sigma / W_\sigma^0$.

(iv) *On a des propriétés analogues à* (ii) *et* (iii) *pour Ψ'.*

Démonstration. D'après (1.12) (v) et (1.13), $\mathcal{A}(Q, P, \sigma, \lambda)$ agit sur $I(\sigma)^{\mu_i}$ par un scalaire non nul qu'on note ε_i^{-1}. Alors

$$\phi_i(Q, \sigma, \lambda) v_i = \phi_i(Q, \sigma, \lambda) \varepsilon_i \mathcal{A}(Q, P, \sigma, \lambda) v_i.$$

D'où l'on déduit, grâce à (1.30):

$$\phi_i(Q,\sigma,\lambda)v_i = \varepsilon_i \mathcal{A}^\delta(Q,P,\sigma,\lambda)\phi_i(P,\sigma,\lambda)v_i.$$

Donc, notant ε la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les ε_i, on a:

$$\Phi(Q,\sigma,\lambda) = \mathcal{A}^\delta(Q,P,\sigma,\lambda)\Phi(P,\sigma,\lambda)\varepsilon.$$

Prenant les déterminants et tenant compte du Lemme 2 (iv), on en déduit:

$$\text{(2.11)} \quad \det\Phi(Q,\sigma,\lambda) \prod_{\alpha\in\Delta_P^+\cap-\Delta_Q^+} \overline{b}_\alpha^\delta(\sigma,-\lambda) = \det\Phi(P,\sigma,\lambda)\, c^\delta(Q,P,\sigma) \prod_{\alpha\in\Delta_P^+\cap-\Delta_Q^+} b_\alpha^\delta(\sigma,\lambda)\, det\varepsilon.$$

Mais les polynômes $\overline{b}_\alpha^\delta(\sigma,-\lambda)$ et $b_\beta^\delta(\sigma,\lambda)$ sont premiers entre eux pour $\alpha,\beta\in\Delta_P^+$. Pour $\alpha=\beta$ cela résulte du Lemme 2 (i) et pour $\alpha\neq\beta$, cela résulte du fait que ces polynômes sont des fonctions de λ_α (resp. λ_β). Appliquant l'équation ci-dessus pour Q égal au sous-groupe parabolique opposé à P, $\overline{P}$, et utilisant le fait qu'une fonction affine qui divise un produit de polynômes doit diviser l'un des termes du produit, on obtient (2.7).

Alors on reporte (2.7) dans l'équation ci-dessus. On fait les simplifications qui s'imposent et on tient compte de la relation $b_\alpha^\delta(\sigma,\lambda) = \overline{b}_{-\alpha}^\delta(\sigma,-\lambda)$, pour $\alpha\in\Delta_P^+\cap-\Delta_Q^+$. Ceci conduit à (2.9), où:

$$\text{(2.12)} \qquad c(Q,P,\sigma,\Phi) = c^\delta(Q,P,\sigma)\det\varepsilon.$$

On procède de même pour (iii), en tenant compte de (1.32). (iv) se démontre de façon analogue à (ii) et (iii).

Lemme 4. *On conserve les notations précédentes. On fixe $\lambda\in\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) $$I(\sigma)^\delta = \sum_{\mu\in A(\sigma)} \pi^P(\sigma,\lambda)(\mathbb{H}(G,K)^{\delta\mu})I(\sigma)^\mu.$$

(ii) *Il existe un Φ comme ci dessus, correspondant à des $\phi_i\in\mathbb{F}_\omega^{\delta\mu_i}$, tel que* $\det\Phi(P,\sigma,\lambda)$ *soit non nul.*

Démonstration. Le lemme est immédiat, compte tenu des définitions. □

Lemme 5. *On suppose $I(\sigma)^\delta$ (resp. $I(\sigma)^\gamma$) non réduit à zéro. Soit $\lambda\in\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$. Il existe un Φ (resp. Φ') comme ci-dessus, correspondant à des $\phi_i\in\mathbb{F}_\omega^{\delta\mu_i}$ (resp. $\phi'_j\in\mathbb{F}_\omega^{\mu'_j\delta}$) tel que $\Psi(P,\sigma,\lambda)$ (resp. $\Psi'(P,\sigma,\lambda)$) soit non nul.*

Démonstration. D'après (2.9), on peut supposer $\mathrm{Re}\,\lambda \in \overline{C}_P$. De (1.7) on déduit que $I^P(\sigma,\lambda)$ est engendré par la somme de ses K-types minimaux. Donc il existe Φ de la forme voulue, tel que *det* $\Phi(P,\sigma,\lambda)$ soit non nul, donc aussi $\Psi(P,\sigma,\lambda)$, d'après (2.7).

On procède de même pour Ψ' en utilisant un analogue du Lemme 4 et en se ramenant au cas où $\mathrm{Re}\,\lambda \in -\overline{C}_P$. □

2.3. *Espace* $K_\sigma^{\delta\gamma}$ *et énoncé de la Proposition* 1.

Définition 1. On conserve les notations précédentes. Si $H = \mathbb{H}$ (resp. $\mathcal{H}_r$), auquel cas $\mathbf{I} = \mathbb{I}$ (resp. $\mathcal{I}_r$), on note $K = \mathbb{K}$ (resp. $\mathcal{K}_r$). On note $K_\sigma^{\delta\gamma}$ l'espace des $\phi \in \mathbf{I}_\sigma^{\delta\gamma}$ tels que si $Q, P \in \mathcal{P}(L)$ sont adjacents et si α est la racine réduite contenue dans $\Delta_P^+ \cap -\Delta_Q^+$, on a:

(2.13) Soit $\lambda_0 \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, tel que $(\mathrm{Re}\,\lambda_0)_\alpha \geq 0$. Soit $z \mapsto v(z)$, une application holomorphe au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, à valeurs dans $I(\sigma)^\gamma$. Si l'application $\lambda \mapsto \mathcal{A}(Q,P,\sigma,\lambda)v(z)$ est divisible par z^n, où $z = \lambda_\alpha - (\lambda_0)_\alpha$, l'application $\lambda \mapsto \phi(P,\sigma,\lambda)v(z)$ est divisible par z^n.

Proposition 1. *Avec les notations précédentes*

$$K_\sigma^{\delta\gamma} = \sum_{\mu,\mu' \in A(\sigma)} \mathbb{F}_\sigma^{\delta\mu'} F_\sigma^{\mu'\mu} \mathbb{F}_\sigma^{\mu\gamma}.$$

Début de la démonstration de la Proposition 1. On va d'abord prouver l'inclusion du membre de droite de l'égalité dans celui de gauche. D'abord $\mathbb{F}_\sigma^{\delta\mu'} F_\sigma^{\mu'\mu} \mathbb{F}_\sigma^{\mu\gamma}$ est contenu dans $F_\sigma^{\delta\gamma}$ d'après (1.35) donc est contenu dans $\mathbf{I}_\sigma^{\delta\gamma}$ d'après (1.34).

Les règles de dérivation d'un produit et le fait que $F_\sigma^{\mu'\mu}\mathbb{F}_\sigma^{\mu\gamma} \subset F_\sigma^{\mu'\gamma}$ montrent qu'il suffit de montrer (2.13) pour $\phi \in F^{\delta\gamma}$, mais en supposant cette fois $\delta \in A(\sigma)$, ce que l'on fait pour achever de prouver l'inclusion du membre de droite dans le membre de gauche.

On choisit v comme dans (2.13). Etudions $\phi(P,\sigma,\lambda)(v(z))$. D'après (1.17), $\mathcal{A}(Q,P,\sigma,\lambda)$ ne dépend que de λ_α, donc de z. On le note $\mathcal{A}(z)$ et on note $c = c^\delta(Q,P,\sigma)$, le scalaire non nul, indépendant de λ, par lequel $\mathcal{A}(Q,P,\sigma,\lambda)$ agit sur $I(\sigma)^\delta$. Alors par la propriété (1.30), on a:

$$c\phi(P,\sigma,\lambda)v(z) = \phi(Q,\sigma,\lambda)\mathcal{A}(z)v(z). \tag{2.14}$$

Alors ϕ vérifie (2.13). L'inclusion du membre de droite dans celui de gauche en résulte. On prépare la démonstration de l'inclusion inverse. On ne suppose plus $\delta \in A(\sigma)$.

Lemme 6. *Soit* $u \in K_\sigma^{\delta\gamma}$. *On choisit* Φ, Φ' *comme au Paragraphe* 2.2. *Avec les notations du Lemme* 3, *il existe une matrice à* $l(= \dim I(\sigma)^\delta)$ *lignes* *et* $s(=\dim I(\sigma)^\gamma)$ *colonnes, dépendant de* $P\in\mathcal{P}(L)$, $\lambda\in\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$, $M=(M_{ij})$, *avec* $M_{ij}\in(S(\mathfrak{a})^{W^0_\sigma})^{\hat{r}_{\mu_i\mu'_j}}$ *si* $K=\mathbb{K}$ *(resp.* $(\mathcal{PW}_r(\mathfrak{a})^{W^0_\sigma})^{\hat{r}_{\mu_i\mu'_j}}$ *si* $K=\mathcal{K}_r$*) telle que*:

$$\Psi(P,\sigma,\lambda)\Psi'(P,\sigma,\lambda)u(P,\sigma,\lambda) = \Phi(P,\sigma,\lambda)M(P,\lambda)\Phi'(P,\sigma,\lambda),\ \ P\in\mathcal{P}(L),\lambda\in\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}.$$

Démonstration. Nous pouvons supposer $\Psi(P,\sigma,\lambda)$ et $\Psi'(P,\sigma,\lambda)$, non identiquement nuls car dans ce cas l'assertion est évidente. Résolvons l'équation:

$$u(P,\sigma,\lambda)=\Phi(P,\sigma,\lambda)N(P,\lambda)\Phi'(P,\sigma,\lambda) \tag{2.15}$$

où $N(P,\lambda)$ est un élément de $\mathrm{Hom}(V',V)$ (ou encore $N(P,\lambda)$ est une matrice $(n_{ij}(P,\lambda))$ à l lignes et s colonnes à l'aide des bases (v_i) et (v'_j)). Pour chaque (P,λ), le système (2.15) est un système d'équations à $l\times s$ inconnues n_{ij}. Il y a autant d'équations que d'inconnues et le déterminant du système est égal à $\det(\Phi(P,\sigma,\lambda))det(\Phi'(P,\sigma,\lambda))$. Les formules de Cramer montrent que (2.15) admet une unique solution dont les coefficients sont des fonctions méromorphes en $\lambda\in\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$. Plus précisément, il existe des fonctions $(P,\lambda)\mapsto p_{ij}(P,\lambda)$, polynômiales en $\lambda\in\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$, si $H=\mathbb{H}$, et dans l'espace $\mathcal{PW}_r(\mathfrak{a})$ si $H=\mathcal{H}_r$, telles que l'on ait:

$$n_{ij}(P,\lambda)=p_{ij}(P,\lambda)/(det(\Phi(P,\sigma,\lambda))det(\Phi'(P,\sigma,\lambda)),\ \ P\in\mathcal{P}(L). \tag{2.16}$$

Donc, d'après le Lemme 3:

$$n_{ij}(P,\lambda)=p_{ij}(P,\lambda)/(\Psi(P,\sigma,\lambda)\Psi'(P,\sigma,\lambda)\prod_{\alpha\in\Delta^+_P}\overline{b}^\delta_\alpha(\sigma,-\lambda)\prod_{\alpha\in\Delta^+_P}b^\gamma_\alpha(\sigma,\lambda)). \tag{2.17}$$

Soit $Q\in\mathcal{P}(L)$. On reporte (2.15) pour P et Q dans la relation

$$\mathcal{A}^\delta(Q,P,\sigma,\lambda)u(P,\sigma,\lambda)=u(Q,\sigma,\lambda)\mathcal{A}^\gamma(Q,P,\sigma,\lambda)$$

et on utilise les relations:

$$\mathcal{A}^\delta(Q,P,\sigma,\lambda)\Phi(P,\sigma,\lambda)=\Phi(Q,\sigma,\lambda)\varepsilon \tag{2.18}$$

où ε est la matrice diagonale avec pour éléments diagonaux les constantes ε_i par lesquelles $\mathcal{A}(Q,P,\sigma,\lambda)$ agit sur les espaces $I(\sigma)^{\mu_i}$, et:

$$\varepsilon'\Phi'(P,\sigma,\lambda)=\Phi'(Q,\sigma,\lambda)\mathcal{A}^\gamma(Q,P,\sigma,\lambda) \tag{2.19}$$

où ε' est la matrice diagonale avec pour éléments diagonaux les constantes ε'_j par lesquelles $\mathcal{A}(Q,P,\sigma,\lambda)$ agit sur les espaces $I(\sigma)^{\mu'_j}$. On en déduit:

$$\varepsilon_i n_{ij}(Q,\lambda)=\varepsilon'_j n_{ij}(P,\lambda),\ \ \lambda\in\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}. \tag{2.20}$$

Tenant compte de (1.16), on établit de même que:

$$n_{ij}(P,w\lambda)=\hat{r}_{\mu_i\mu'_j}(w)n_{ij}(P,\lambda),\ \ w\in W_\sigma,\ \ \lambda\in\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}. \tag{2.21}$$

Tenant compte de (1.21), le Lemme résultera donc du Lemme suivant.

LEMME 7. *$n_{ij}(P,\lambda)\Psi(P,\sigma,\lambda)\Psi'(P,\sigma,\lambda)$ est holomorphe en $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$.*

Pour démontrer ce Lemme on commence par démontrer le Lemme suivant.

LEMME 8. *Soit Φ' comme ci-dessus et $u \in K^{\delta\gamma}_{\sigma}$. Soit $Q, P \in \mathcal{P}(L)$ adjacents et soit α l'unique élément de $\Delta^+_P \cap -\Delta^+_Q$. Il existe $\Phi'_\alpha(P,\sigma,\lambda) \in \mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, V')$ (resp. $u_\alpha(P,\sigma,\lambda) \in \mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, I(\sigma)^\delta)$, méromorphe en $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, holomorphe en tout élément $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ avec $\mathrm{Re}\,\lambda \in \overline{C}_P$, telle que l'on ait les égalités de fonctions méromorphes en $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:*

$$\Phi'(P,\sigma,\lambda) \equiv \Phi'_\alpha(P,\sigma,\lambda)\mathcal{A}^\gamma(Q,P,\sigma,\lambda), \tag{2.22}$$

$$u(P,\sigma,\lambda) \equiv u_\alpha(P,\sigma,\lambda)\mathcal{A}^\gamma(Q,P,\sigma,\lambda). \tag{2.23}$$

Démonstration. On traite d'abord le cas de Φ'. La relation (2.18) montre que $\Phi'_\alpha(P,\sigma,\lambda) := (\varepsilon')^{-1}\Phi'(Q,\sigma,\lambda)$ vérifie les conditions voulues.

Montrons (2.23). On note $u_\alpha(P,\sigma,\lambda)$ la fonction méromorphe en $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ définie par:

$$u_\alpha(P,\sigma,\lambda) := u(P,\sigma,\lambda)(\mathcal{A}^\gamma(Q,P,\sigma,\lambda))^{-1}. \tag{2.24}$$

Il reste à voir que cette fonction est holomorphe en tout élément $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda_0 \in \overline{C}_P$. Il suffit de voir que pour tout $\varphi \in I^\gamma(\sigma)$, $u_\alpha(P,\sigma,\lambda)\varphi$ est holomorphe en λ_0. L'application $\lambda \mapsto \mathcal{A}(Q,P,\sigma,\lambda)^{-1}\varphi$ ne dépend que de $z = \lambda_\alpha - (\lambda_0)_\alpha$ et est de la forme

$$\mathcal{A}(Q,P,\sigma,\lambda)^{-1}\varphi = z^{-n}v(z) \tag{2.25}$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $v(z)$ est une fonction holomorphe au voisinage de 0, à valeurs dans $I^\gamma(\sigma)$. Alors (2.25) équivaut au fait que $\mathcal{A}(Q,P,\sigma,\lambda)v(z)$ est divisible par z^n. Tenant compte de la définition (cf. Définition 1) de $K^{\delta\gamma}_\sigma$, on en déduit que $u(P,\sigma,\lambda)v(z)$ est divisible par z^n, ce qui, en revenant à la définition (2.24) de $u_\alpha(P,\sigma,\lambda)\varphi$ et de $v(z)$ (cf. (2.25)), montre l'assertion voulue. □

Démonstration du Lemme 7. Soit $P \in \mathcal{P}(L)$ et $\alpha_0 \in \Delta^+_P$, simple. Il résulte du Lemme 8 que l'on peut réécrire (2.15) sous la forme:

$$u_{\alpha_0}(P,\sigma,\lambda) = \Phi(P,\sigma,\lambda)N(P,\sigma,\lambda)\Phi'_{\alpha_0}(P,\sigma,\lambda). \tag{2.26}$$

D'après (2.22), le Lemme 3 et le Lemme 2(i), il existe une constante c telle que:

$$\det \Phi'_{\alpha_0}(P,\sigma,\lambda) = c\Psi'(P,\sigma,\lambda)\overline{b}^\gamma_{\alpha_0}(\sigma,-\lambda)\Big(\prod_{\alpha\in\Delta^+_P,\alpha\neq\alpha_0} b^\gamma_\alpha(\sigma,\lambda)\Big). \tag{2.27}$$

Comme, d'après le Lemme 2 (i), $\overline{b}^{\gamma}_{\alpha_0}(\sigma,-\lambda)$ ne s'annule pas pour $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha \geq 0$, on a:

(2.28)
$$n_{ij}(P,\lambda) = q_{ij}(P,\lambda)/(\Psi(P,\sigma,\lambda)\Psi'(P,\sigma,\lambda)(\prod_{\alpha\in\Delta_P^+,\alpha\neq\alpha_0} b^{\gamma}_{\alpha}(\sigma,\lambda)\prod_{\alpha\in\Delta_P^+}\overline{b}^{\delta}_{\alpha}(\sigma,-\lambda)))$$

ou $q_{ij}(P,\lambda)$ est holomorphe au voisinage de tout λ avec $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha \geq 0$. Reportant (2.28) dans (2.17), on en déduit que $p_{ij}(P,\lambda)$ est divisible par $b^{\gamma}_{\alpha_0}(\sigma,\lambda)$ au voisinage de λ vérifiant $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha \geq 0$. Soit $\alpha\in\Delta_P^+$. On peut choisir $Q\in\mathcal{P}(L)$ tel que α soit simple pour Δ_Q^+. Tenant compte de (2.16), de (2.11) (et de son analogue pour Φ') et de (2.20), on voit que:

$$p_{ij}(Q,\lambda)\prod_{\beta\in\Delta_P^+\cap-\Delta_Q^+} b^{\delta}_{-\beta}(\sigma,\lambda)b^{\gamma}_{\beta}(\sigma,\lambda)$$

est, comme fonction de $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ proportionnel à:

$$p_{ij}(P,\lambda)\prod_{\beta\in\Delta_P^+\cap-\Delta_Q^+} b^{\delta}_{\beta}(\sigma,\lambda)b^{\gamma}_{-\beta}(\sigma,\lambda).$$

Mais α et $-\alpha$ ne sont pas éléments de $\Delta_P^+\cap-\Delta_Q^+$. Comme, d'après ce qui précède, $p_{ij}(Q,\lambda)$ est divisible par $b^{\gamma}_{\alpha}(\sigma,\lambda)$ au voisinage de λ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha\geq 0$, il en va de même de $p_{ij}(P,\lambda)$ (cf. §1.6). Il en résulte que $p_{ij}(P,\lambda)$ est divisible par $\prod_{\alpha\in\Delta_P^+} b^{\gamma}_{\alpha}(\sigma,\lambda))$ en tout λ avec $\mathrm{Re}\,\lambda\in\overline{C}_P$. Par ailleurs $\prod_{\alpha\in\Delta_P^+}\overline{b}^{\delta}_{\alpha}(\sigma,-\lambda))$ ne s'annule pas si $\mathrm{Re}\,\lambda\in\overline{C}_P$. De ce qui précède et de (2.17), il résulte que $n_{ij}(P,\lambda)\Psi(P,\sigma,\lambda)\Psi'(P,\sigma,\lambda)$ est holomorphe au voisinage de tout $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda\in\overline{C}_P$. On déduit alors de (2.9) et de (2.20)) que cette fonction est holomorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. Ceci achève de prouver le Lemme 7. □

Avant de finir la démonstration de la Proposition 1, établissons:

Lemme 9. *Soit $P\in\mathcal{P}(L)$.*

(i) *L'espace J engendré par les applications $\lambda\mapsto\Psi(P,\sigma,\lambda)$, lorsque $\mu_1,\dots,\mu_l\in A(\sigma)$ varient de même que les ϕ_i décrivent $\mathbb{F}^{\delta\mu_i}_{P,\sigma}$, est égal à $S(\mathfrak{a})^{W^0_\sigma}$.*

(ii) *L'espace J', engendré par les applications $\lambda\mapsto\Psi'(P,\sigma,\lambda)$, lorsque $\mu'_1,\dots,\mu'_s\in A(\sigma)$ varient de même que les ϕ'_i décrivent $\mathbb{F}^{\mu'_i\gamma}_{P,\sigma}$, est égal à $S(\mathfrak{a})^{W^0_\sigma}$.*

Démonstration. Comme W^0_σ est engendré par des réflexions, $S(\mathfrak{a})^{W^0_\sigma}$ est une algèbre de polynômes. Par ailleurs comme $\mathbb{F}^{\delta\mu'}\mathbb{F}^{\mu'\mu}\subset\mathbb{F}^{\delta\mu}$, et que pour tout μ, la somme $\sum_{\mu'\in A(\sigma)}(S(\mathfrak{a})^{W^0_\sigma})^{\hat{r}_{\mu'\mu}}$ est égale à $S(\mathfrak{a})^{W^0_\sigma}$, (1.36) montre que J est un idéal de $S(\mathfrak{a})^{W^0_\sigma}$. D'après le Lemme 5, cet idéal est sans zéro, donc égal à $S(\mathfrak{a})^{W^0_\sigma}$, d'après le Théorème des zéros de Hilbert. Ceci achève de prouver (i). On procède de façon similaire pour (ii). □

Fin de la démonstration de la Proposition 1. Soit $P \in \mathcal{P}(L)$. Soit Φ_m, $m = 1, \dots, n$, construit avec des $\phi_i \in \mathbb{F}_\omega^{\delta\mu_i}$ et des v_i dépendant de m tels que:

$$\sum_{m=1,\dots,n} \Psi_m(P, \sigma, \lambda) = 1, \ \ \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}.$$

Soit Φ'_r, $r = 1, \dots, t$, construits avec des $\phi'_j \in \mathbb{F}_\omega^{\mu'_j\gamma}$ et des v'_j dépendant de r tels que:

$$\sum_{r=1,\dots,t} \Psi'_r(P, \sigma, \lambda) = 1, \ \ \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}.$$

Soit alors $u \in K_\sigma^{\delta\gamma}$. Alors le Lemme 6 montre que pour tout (m, r) il existe une matrice $M(m, r)(\lambda)$, dépendant de (m, r), à l lignes et s colonnes, dont le coefficient (i, j) est élément de $(S(\mathfrak{a})^{W_\sigma^0})^{\hat{r}_{\mu_i\mu'_j}}$ si $K = \mathbb{K}$ (resp. élément de $(\mathcal{PW}_r(\mathfrak{a})^{W_\sigma^0})^{\hat{r}_{\mu_i\mu'_j}}$ si $K = \mathcal{K}_r$), telle que:

$$\Psi_m(P, \sigma, \lambda)\Psi'_r(P, \sigma, \lambda)u(P, \sigma, \lambda) = \Phi_m(P, \sigma, \lambda)M(m, r)(\lambda)\Phi'_r(P, \sigma, \lambda), \ \ \lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}.$$

Pour (m, r) fixés soit $T(m, r, i, j)$ l'application linéaire de $I(\sigma)^{\mu'_j}$ dans $I(\sigma)^{\mu_i}$ qui à v'_j associe v_i et qui est nulle sur l'orthogonal de v'_j. Alors

$$\begin{aligned}\Phi_m(P, \sigma, \lambda)&M(m, r)(\lambda)\Phi'_r(P, \sigma, \lambda)\\ &\equiv \sum_{i,j} \phi_i(P, \sigma, \lambda)(M(m, r)_{i,j}(\lambda)T(m, r, i, j))\phi'_j(P, \sigma, \lambda).\end{aligned}$$

D'après (1.36), (1.38) et (1.35), le second membre est, comme fonction de λ, un élément de $\sum_{i,j} \mathbb{F}_{P,\sigma}^{\delta\mu_i} F_{P,\sigma}^{\mu'\mu} \mathbb{F}_{P,\sigma}^{\mu\gamma}$. Sommant sur m et r, on voit que u coincide, sur l'ensemble des (P, σ, λ), $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, avec un élément de $\sum_{i,j} \mathbb{F}_\sigma^{\delta\mu_i} F_\sigma^{\mu'\mu} \mathbb{F}_\sigma^{\mu\gamma}$. Ces deux éléments de $\mathbb{I}_\sigma^{\delta\gamma}$ coincident d'après (1.30). Donc u appartient au deuxième membre de l'égalité de la Proposition 1. Ceci achève la preuve de la Proposition 1. □

3. Espaces des transformées de Fourier de $\mathbb{H}(G, K)$ et $\mathcal{H}_r(G, K)$

3.1. *Enoncé du Théorème* 1. Soit $H = \mathbb{H}$ ou $\mathcal{H}_r$. On note PW pour $\mathbb{PW}$ (resp. $\mathcal{PW}_r$) si $H = \mathbb{H}$ (resp. $\mathcal{H}_r$). On note F pour $\mathbb{F}$ (resp. $\mathcal{F}_r$) si $H = \mathbb{H}$ (resp. $\mathcal{H}_r$).

Définition 2. On note $F^{\delta\gamma}$ (resp. $F(G, K)$) *l'espace des applications* ϕ, qui à (P, σ, λ), où $L = MA \in \mathcal{L}$, $P \in \mathcal{P}(L)$, $\sigma \in \hat{M}_d$, associent $\phi(P, \sigma, \lambda) \in \mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, I(\sigma)^\delta)$ (resp. $\mathrm{Hom}(I(\sigma), I(\sigma))$ et pour lesquelles il existe $h \in H(G, K)^{\delta\gamma}$ (resp. $h \in H(G, K)$), vérifiant $\phi(P, \sigma, \lambda) = \hat{h}(P, \sigma, \lambda)$ pour tout (P, σ, λ) comme ci-dessus.

D'autre part on note $PW(G, K)^{\delta\gamma}$ *l'espace des applications* ϕ, qui associent à (P, σ, λ), où $L = MA \in \mathcal{L}$, $P \in \mathcal{P}(L)$, $\sigma \in \hat{M}_d$, $\phi(P, \sigma, \lambda) \in \mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, I(\sigma)^\delta)$ telles que :

(3.1) L'application $\lambda \mapsto \phi(P, \sigma, \lambda)$ est élément de $S(\mathfrak{a}) \otimes \mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, I(\sigma)^\delta)$ si $PW = \mathbb{PW}$ (resp. $\mathcal{PW}_r(\mathfrak{a}) \otimes \mathrm{Hom}(I(\sigma)^\gamma, I(\sigma)^\delta)$ si $PW = \mathcal{PW}_r$).

(3.2) Chaque ϕ définit par dérivations successives (cf. §1.5) des endomorphismes de chaque dérivée successive de série principale généralisée, donc aussi des sommes finies de celles-ci. On demande que ces endomorphismes préservent les $(\mathfrak{g}, K)$-sous-modules de ces sommes finies, donc définissent des opérateurs dans les sous-quotients. On demande que ces opérateurs commutent aux opérateurs d'entrelacement entre ces sous-quotients.

On note $PW(G, K)$ *la somme directe* des $PW(G, K)^{\delta\gamma}$, lorsque δ, γ varient dans $\hat{K}$

Remarque 2. On remarque que, d'une part (3.2) implique les relations (1.30), (1.31). D'autre part, si ϕ vérifie la propriété suivante, il vérifie (3.2):

(3.3) Dans toute somme finie de dérivées successives de séries principales généralisées (π, V), l'opérateur déterminé par *dérivation* de ϕ (cf. §1.5) est induit par un élément h, de $H(G, K)$, dépendant éventuellement de π.

On déduit donc de (1.28) que:

$$F^{\delta\gamma} \subset PW(G, K)^{\delta\gamma}. \tag{3.4}$$

Théorème 1. (i) *Pour tout δ, $\gamma \in \hat{K}$, on a*:

$$F^{\delta\gamma} = PW(G, K)^{\delta\gamma}.$$

(ii) *On munit $F(G, K)$ et $PW(G, K)$ d'une structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module, dite action à gauche en définissant l'action de x élément de K ou $\mathfrak{g}$ sur ϕ par $\pi^L(x)\phi(P, \sigma, \lambda) = \pi^P(\sigma, \lambda)(x)\phi(P, \sigma, \lambda)$. On définit de même une action à droite. Alors $h \in H(G, K) \mapsto \hat{h} \in PW(G, K)$ entrelace les actions à droite* (*resp. gauche*) *de $\mathfrak{g}$ et K sur ces espaces.*

3.2. *Enoncé et preuve de la Proposition* 2.

Proposition 2. *Soit $\delta, \gamma \in \hat{K}$. Soit $t \geq 0$. Soit $N_t^{\delta\gamma}$ le sous-espace de $PW(G, K)^{\delta\gamma}$ formé des ϕ tels que*:

(3.5) $\phi(P, \sigma, \lambda) = 0$, *si $L = MA \in \mathcal{L}$, $P \in \mathcal{P}(L)$, $\sigma \in \hat{M}_d$, $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, sont tels que pour tout $\mu \in A(\sigma)$, $\|\mu\| \geq t$.*

Alors on a:

$$N_t^{\delta\gamma} = \sum_{\varepsilon \in \hat{K}, \|\varepsilon\| < t} F^{\delta\varepsilon} \mathbb{F}^{\varepsilon\gamma}.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \hat{K}$ tel que $\|\varepsilon\| < t$. On a clairement $F^{\delta\varepsilon}\mathbb{F}^{\varepsilon\gamma} \subset F^{\delta\gamma}$. Par ailleurs si pour tout $\mu \in A(\sigma)$, $\|\mu\| \geq t$, ε n'est pas contenu dans $I(\sigma)$. Donc $\psi(P,\sigma,\lambda) = 0$ pour $\psi \in F^{\delta\varepsilon}$. D'où l'on déduit:

$$\sum_{\varepsilon\in\hat{K},\|\varepsilon\|<t} F^{\delta\varepsilon}\mathbb{F}^{\varepsilon\gamma} \subset N_t^{\delta\gamma}. \tag{3.6}$$

Montrons l'inclusion dans l'autre sens. Soient $t_1,\ldots,t_p$, les longueurs des K-types minimaux des $I(\sigma)$, où $L = MA \in \mathcal{L}$ et $\sigma \in \hat{M}_d$, tels que $I(\sigma)^\gamma$ soit non nul. Montrons qu'il suffit de prouver la Proposition pour $t = t_1,\ldots,t_p$ et $t_{p+1} = t_p + 1$. En effet, si $I(\sigma)$ ne contient pas δ ou γ, $\phi(P,\sigma,\lambda)$ est identiquement nul pour $\phi \in F^{\delta\gamma}$. Donc la condition (3.5) ne porte que sur les σ tels que $I^\gamma(\sigma)$ soit non nul.

Pour $t = t_1$, la Proposition se réduit à $\{0\} = \{0\}$. Supposons la Proposition démontrée pour t_{q-1}. Soit $\phi \in N_{t_q}^{\delta\gamma}$. Notons $(\sigma_1,L_1)\ldots,(\sigma_s,L_s)$, avec $L_i = M_iA_i \in \mathcal{L}$ et $\sigma_i \in (\hat{M}_i)_d$, une famille maximale, telle que les $A(\sigma_i)$ soient deux à deux disjoints, formés de K-types de longueur t_{q-1}, et telle que les $I^\gamma(\sigma_i)$ soient non nuls. Montrons que:

(3.7) Pour tout i, l'application $(P,\lambda) \mapsto \phi(P,\sigma_i,\lambda)$, où $P \in \mathcal{P}(L_i)$, $\lambda \in (\mathfrak{a}_i^*)_\mathbb{C}$ est élément de $K_{\sigma_i}^{\delta\gamma}$.

En effet soit $P,Q \in \mathcal{P}(L_i)$ adjacents et soit α l'unique élément de $\Delta_P^+ \cap -\Delta_Q^+$. Soit $\lambda_0 \in (\mathfrak{a}_i)_\mathbb{C}^*$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda_0)_\alpha \geq 0$. Soit $z \mapsto v(z)$ une application holomorphe au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, à valeurs dans $I(\sigma)^\gamma$. On suppose que l'application $\lambda \mapsto A(Q,P,\sigma_i,\lambda)v(z)$ est divisible par z^{n+1}, où $z = \lambda_\alpha - (\lambda_0)_\alpha$. Montrons que:

(3.8) L'application $\lambda \mapsto \phi(P,\sigma,\lambda)v(z)$ est divisible par z^{n+1}.

Prenons des coordonnées affines $(z,z_1,\ldots,z_k)$ dans $(\mathfrak{a}_i)_\mathbb{C}^*$. D'après (1.18), l'hypothèse équivaut au fait que, $\frac{\partial^n}{\partial z^n}.\mathcal{A}(Q,P,\sigma_i,\lambda)v(z)$ est nul en $z = 0$. En d'autres termes, tenant compte de (1.19), ceci équivaut au fait que, $(\frac{\partial^n}{\partial z^n}.v)(0)$ est dans le noyau, V, de $\frac{\partial^n}{\partial z^n}..\mathcal{A}(Q,P,\sigma_i,\lambda)$ pour $z = 0$. Mais celui-ci ne contient aucun K-type minimal de $I(\sigma_i)$, car les opérateurs $\mathcal{A}(Q,P,\sigma_i,\lambda)$ sont des scalaires de module 1, indépendants de λ sur ces K-types et il en va de même des opérateurs "dérivés". D'après le résultat de [DSou] rappelé en (1.20), ce noyau est un sous-quotient d'une somme de dérivées de séries principales généralisées $\pi^{P_j}(\sigma'_j,\lambda_j)$, où, pour tout j, les éléments de $A(\sigma'_j)$ sont de longueur strictement supérieure à ceux de $A(\sigma_i)$. On en déduit que $\phi(P_j,\sigma'_j,\nu)$ est nul pour tout $\nu \in (\mathfrak{a}_j)_\mathbb{C}^*$, donc aussi ses dérivées successives, car $\phi \in N_{t_q}^{\delta\gamma}$. Par entrelacement et en utilisant (3.2), on en déduit que $\frac{\partial^n}{\partial z^n}..\phi(P_i,\sigma_i,\lambda)$, est nul sur V. Donc on a:

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}..\phi(P_i,\sigma_i,\lambda)\frac{\partial^n}{\partial z^n}.v(z) = 0, \ \textit{pour} \ z = 0.$$

Grâce à (1.19), ceci implique que, comme on l'a remarqué: $\phi(P_i, \sigma_i, \lambda)v(z)$ est divisible par z^{n+1}. Ceci achève de prouver (3.8) et donc (3.7).

Alors, d'après la Proposition 1 et (1.35), on a:

$$\phi(P_i, \sigma_i, \lambda) = \phi_i(P_i, \sigma_i, \lambda), \lambda \in (\mathfrak{a}_i)^*_{\mathbb{C}} \text{ pour un } \phi_i \in \sum_{\mu \in A(\sigma_i)} F^{\delta\mu}\mathbb{F}^{\mu\gamma}. \tag{3.9}$$

Notez que les propriétés d'entrelacement (1.30), (1.31) montrent que l'on peut étendre ces identités en remplaçant P_i par $P \in \mathcal{P}(L_i)$, et les σ_i par des éléments de $\hat{M}_d$ équivalents, puis les triplets (P, σ, λ) par leurs conjugués sous $N_K(\mathfrak{a}_{\min})$.

Si $j \neq i$, $\phi_i(Q, \sigma_j, \lambda)$ est identiquement nulle car aucun élément μ de $A(\sigma_i)$ n'est contenu dans $I(\sigma_j)$ et les éléments de $F^{\mu\gamma}$ sont nuls sur (Q, σ_j, λ), $Q \in \mathcal{P}(L_j)$.

Montrons que $\phi' := \phi - \phi_1 - \cdots - \phi_s$ est élément de $N^{\delta\gamma}_{t_{q-1}}$. En effet soit (P, σ, λ), où $L = MA \in \mathcal{L}$, $P \in \mathcal{P}(L)$, $\sigma \in \hat{M}_d$ et $\mu' \in A(\sigma)$. On suppose $\|\mu'\| \geq t_{q-1}$. Montrons que $\phi'(P, \sigma, \lambda)$ est nul. Etudions d'abord le cas où $\|\mu'\| > t_{q-1}$. Dans ce cas pour tout i et tout $\mu \in A(\sigma_i)$, μ n'est pas contenu dans $I(\sigma)$ car de longueur strictement plus petite que celle des éléments de $A(\sigma)$. Comme $\phi_i \in \sum_{\mu \in A(\sigma_i)} F^{\delta\mu}\mathbb{F}^{\mu\gamma}$, on a $\phi_i(P, \sigma, \lambda) = 0$. On a également $\phi(P, \sigma, \lambda) = 0$, par hypothèse. Donc $\phi'(P, \sigma, \lambda)$ est nul, comme désiré.

Etudions maintenant le cas où $\|\mu'\| = t_{q-1}$. Si $I(\sigma)$ ne contient pas γ, clairement $\phi'(P, \sigma, \lambda)$ est nul. Si $I(\sigma)$ contient γ, μ' appartient à l'un des $A(\sigma_i)$: cela résulte de la définition de la famille $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$, et du fait que $A(\sigma)$ et $A(\sigma_i)$ sont disjoints ou confondus et s'ils sont confondus les classes d'équivalence de σ et σ_i sont conjuguées (cf. [V1,Th. 7.17]). On déduit aisément de ce qui précède que $\phi'(P, \sigma, \lambda)$ est nul. Donc ϕ' est élément de $N^{\delta\gamma}_{t_{q-1}}$. L'hypothèse de récurrence et (3.9) montrent que:

$$\phi' \in \sum_{\varepsilon \in \hat{K}, \|\varepsilon\| < t_q} F^{\delta\varepsilon}\mathbb{F}^{\varepsilon\gamma}.$$

Ceci achève la preuve de la Proposition 2. □

Démonstration du Théorème 1. Il suffit de prouver (i). Soit $t \in R$ avec $t > \mathrm{Sup}(\|\gamma\|, \|\delta\|)$. Si $L = MA \in \mathcal{L}$ et $\sigma \in \hat{M}_d$ sont tels que tout élément de $A(\sigma)$ est de longueur supérieure ou égale à t, $I(\sigma)$ ne contient ni δ ni γ. Donc, pour $\phi \in PW(G, K)^{\delta\gamma}$ et $P \in \mathcal{P}(L)$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, $\phi(P, \sigma, \lambda)$ est nul. Donc $N^{\delta\gamma}_t = PW(G, K)^{\delta\gamma}$. Compte tenu de la Proposition 2, on en déduit

$$PW(G, K)^{\delta\gamma} = \sum_{\varepsilon \in \hat{K}, \|\varepsilon\| < t} F^{\delta\varepsilon}\mathbb{F}^{\varepsilon\gamma}.$$

Comme $F^{\delta\varepsilon}\mathbb{F}^{\varepsilon\gamma} \subset F^{\delta\gamma}$ et que $F^{\delta\gamma} \subset PW(G, K)^{\delta\gamma}$, on a bien $F^{\delta\gamma} = PW(G, K)^{\delta\gamma}$. □

Proposition 3. *Soit $\delta \in \hat{K}$ et soit $N^{\delta\delta}$ l'idéal de $F^{\delta\delta}$ formé des $\phi \in F^{\delta\delta}$ nuls sur tout (P, σ, λ) tel que $A(\sigma)$ contienne δ. Alors*:

$$N^{\delta\delta} = \sum_{\varepsilon \in \hat{K}, \|\varepsilon\| < \|\delta\|} F^{\delta\varepsilon} \mathbb{F}^{\varepsilon\delta}.$$

Démonstration. Soit $t = \|\delta\|$. Alors $N^{\delta\delta} = N_t^{\delta\delta}$et l'égalité voulue résulte de la Proposition 2. □

4. Transformée de Fourier de l'espace $C_c^\infty(G)$

4.1. *Rappel sur la formule de Plancherel d'Harish-Chandra.* On note Θ l'ensemble des paires (P, σ), où $P = MAN \in \mathcal{P}$ et $\sigma \in \hat{M}_d$. On note $\tilde{\Theta}$ l'ensemble des triplets (P, σ, λ), où $(P = MAN, \sigma) \in \Theta$ et $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. On note $\mathcal{H}(\sigma)$ l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de $I^2(\sigma)$, muni du produit scalaire $(T_1|T_2) = \mathrm{Tr}(T_2^* T_1)$. On note $\|.\|_{\mathrm{HS}}$ la norme correspondante. La formule de Plancherel d'Harish-Chandra (cf. [H-C]) montre notamment que:

(4.1) Pour chaque $(P, \sigma) \in \Theta$, il existe une fonction C^∞ sur $i\mathfrak{a}^*$, $\lambda \mapsto \mu(P, \sigma, \lambda)$ telle que, avec les notations du Lemme 1:

(i) Il existe une constante C et $n \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $(P, \sigma) \in \Theta$, $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, on ait:

$$|\mu(P, \sigma, \lambda)| \leq C(1 + \|\Lambda_\sigma\|^2 + \|\lambda\|^2)^n.$$

(ii) Si $h \in \mathcal{H}(G, K)$, la restriction, ψ, de $\phi = \hat{h}$ aux triplets $(P, \sigma, \lambda) \in \tilde{\Theta}$ tels que $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, détermine un élément de la somme hilbertienne:

$$\mathcal{L}^2 := \overline{\oplus}_{(P,\sigma)\in\Theta} L^2(i\mathfrak{a}^*, \mu(P, \sigma, \lambda) d\lambda) \hat{\otimes} \mathcal{H}(\sigma)$$

où $\hat{\otimes}$ désigne le produit tensoriel hilbertien.

(iii) L'application $h \mapsto \psi$ de $\mathcal{H}(G, K)$ dans $\mathcal{L}^2$ s'étend en une isométrie, notée $\mathcal{F}$, de $L^2(G)$ sur un sous-espace de $\mathcal{L}^2$. L'action à droite et à gauche de K sur les espaces $\mathcal{H}(\sigma)$ détermine une représentation unitaire continue de $K \times K$. L'application $\mathcal{F}$ entrelace l'action de $K \times K$ par translation à droite et à gauche sur $L^2(G)$ et cette action.

4.2. *Espace $\mathcal{PW}_r(G)$.* On rappelle qu'une représentation π de G dans un espace de Fréchet, E, est dite continue si l'application $G \times E \to E$, $(g, v) \mapsto \pi(g)v$ est continue. Elle est dite C^∞, si en outre pour tout v, $g \mapsto \pi(g)v$ est C^∞ de G dans E. On note $\mathcal{D}(G) = C_c^\infty(G)$ et on note $\mathcal{D}_r(G)$ l'espace des éléments de $\mathcal{D}(G)$ à support dans B_r. C'est un espace de Fréchet sur lequel K opère par translation à droite et à gauche de façon C^∞, comme sous-espace fermé invariant sous $K \times K$ de $C^\infty(G)$. Si E est un espace vectoriel topologique, on note $L_c(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans lui même.

Si $(P = MAN, \sigma) \in \Theta$, on munit $I^\infty(\sigma)$ de la topologie définie par les semi-normes $\varphi \mapsto \|u \star \varphi\|_{I^2(\sigma)}$, $u \in \mathbb{U}(\mathfrak{k})$. C'est la topologie de l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation de K dans $I^2(\sigma)$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, $I^\infty(\sigma)$ est aussi l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation $\bar{\pi}^P(\sigma, \lambda)$ de G dans $I^2(\sigma)$. La topologie naturelle de cet espace de vecteurs C^∞ pour G est donnée par les semi-normes $\varphi \mapsto \|\bar{\pi}^P(\sigma, \lambda)(v)\varphi\|_{I^2(\sigma)}$, $v \in \mathbb{U}(\mathfrak{g})$. Grâce au Lemme 4.4.4.8 de [War] , on peut limiter les u ci-dessus aux puissances de $\Delta = C_{\mathfrak{g}} - 2C_{\mathfrak{k}}$, où $C_{\mathfrak{g}}$ (resp. $C_{\mathfrak{k}}$) est le Casimir de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{k}$) relativement à B. Mais $\bar{\pi}^P(\sigma, \lambda)(C_{\mathfrak{g}})$ est scalaire. On peut donc limiter les v ci-dessus aux puissances de $C_{\mathfrak{k}}$. Donc cette topologie coincide avec la topologie originale de $I^\infty(\sigma)$.

Définition 3. On note $\mathcal{PW}_r(G)$ *l'espace des applications* ϕ, qui à $(P = MAN, \sigma, \lambda) \in \tilde{\Theta}$, associe $\phi(P, \sigma, \lambda) \in L_c(I^\infty(\sigma))$ telle que:

(4.2) Pour tout $(P, \sigma) \in \Theta$ et $\varphi \in I^\infty(\sigma)$, $\lambda \mapsto \phi(P, \sigma, \lambda)\varphi$ est holomorphe en $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, à valeurs dans $I^\infty(\sigma)$.

(4.3) Pour tout $u, v \in \mathbb{U}(\mathfrak{k})$, $(P, \sigma, \lambda) \in \tilde{\Theta}$, $\pi^P(\sigma, \lambda)(u)\phi(P, \sigma, \lambda)\pi^P(\sigma, \lambda)(v)$ se prolonge en un opérateur continu de $I^2(\sigma)$. De plus:

$$\operatorname*{Sup}_{(P,\sigma)\in\Theta,\ \lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}} \frac{(1 + \|\Lambda_\sigma\|^2 + \|\lambda\|^2)^n}{e^{r\|\mathrm{Re}\,\lambda\|}} \|\pi^P(\sigma, \lambda)(u)\phi(P, \sigma, \lambda)\pi^P(\sigma, \lambda)(v)\| < +\infty.$$

On notera ce Sup, $p_{u,v,n}(\phi)$. Ici, on a utilisé la norme des opérateurs continus dans $I^2(\sigma)$.

(4.4) Les $\phi(P, \sigma, \lambda)$ définissent par "dérivation" (cf. §1.5) des opérateurs dans les dérivées successives des représentations $\pi_P(\sigma, \lambda)$ de G dans $I^\infty(\sigma)$. On demande que ces opérateurs laissent invariants les sous-espaces fermés G-invariants des sommes finies de tels G-modules. Ces opérateurs définissent donc des opérateurs dans les sous-quotients relatifs à des sous-espaces G-invariants fermés De plus on demande que les opérateurs dans ces sous-quotients relatifs à des sous-espaces G-invariants fermés, soient entrelacés par tout opérateur d'entrelacement continu entre deux tels sous-quotients.

Remarque 3. Les dérivées successives des représentations $\pi_P(\sigma, \lambda)$ de G dans $I^\infty(\sigma)$ sont des induites C^∞, de longueur finie, (cf. [DSou, Lemme A.1]) et s'identifient à l'espace des vecteurs C^∞ d'une représentation de G dans un espace de Hilbert. D'après [Wall Lemme 11.5.1], ce sont donc des représentations C^∞ dans des espaces de Fréchet, à croissance modérée, de G. Il en va de même de leurs sous quotients, pour des sous-G-modules fermés, de leurs sommes finies (cf. [Wall, Lemme 11.5.2]). Les entrelacements entre ces sous-quotients s'identifient donc aux entrelacements entre les $(\mathfrak{g}, K)$-modules sous-jacents, d'après le Théorème de continuité automatique de W. Casselman et N. Wallach (cf. e.g. [Wall, Cor. 11.5.6]).

Lemme 10. (i) *L'espace* $\mathcal{PW}_r(G)$ *muni des semi-normes* $p_{u,v,n}$, $u, v \in U(\mathfrak{k})$, *et* $n \in \mathbb{N}$, *est un espace de Fréchet. La convergence d'une suite* (ϕ_n) *vers* ϕ *dans* $\mathcal{PW}_r(G)$ *implique que pour tout* $(P, \sigma, \lambda) \in \tilde{\Theta}$, *la suite d'opérateurs dans* $I^2(\sigma)$, $(\phi_n(P, \sigma, \lambda))$ *converge simplement vers* $\phi(P, \sigma, \lambda)$.

(ii) *L'application* $f \mapsto \hat{f}$, *où* $\hat{f}(P, \sigma, \lambda) := \pi^P(\sigma, \lambda)(f) \in L_c(I^\infty(\sigma))$ *pour* $(P, \sigma, \lambda) \in \tilde{\Theta}$, *est une application linéaire continue de* $\mathcal{D}_r(G)$ *dans* $\mathcal{PW}_r(G)$.

Démonstration. (i) On voit facilement que si (ϕ_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{PW}_r(G)$, pour tout $(P, \sigma, \lambda) \in \tilde{\Theta}$, $(\phi_n(P, \sigma, \lambda))$ converge en norme vers un opérateur continu, $\phi(P, \sigma, \lambda)$, de $I^2(\sigma)$. De plus, pour $\varphi \in I^\infty(\sigma)$, $(\phi_n(P, \sigma, \lambda)\varphi)$ converge dans $I^\infty(\sigma)$ vers un élément ψ, de sorte que $\phi(P, \sigma, \lambda)\varphi = \psi \in I^\infty(\sigma)$. Donc $\phi(P, \sigma, \lambda)$ préserve $I^\infty(\sigma)$. Le théorème du graphe fermé pour les espaces de Fréchet et le fait que $\phi(P, \sigma, \lambda)$ soit un opérateur borné dans $I^2(\sigma)$, montrent que $\phi(P, \sigma, \lambda) \in L_c(I^\infty(\sigma))$. Le fait que $\mathcal{PW}_r(G)$ est un espace de Fréchet en résulte facilement. La deuxième assertion de (i) est claire

Montrons (ii). Soit $f \in \mathcal{D}_r(G)$. Les propriétés (4.2) et (4.4) pour $\hat{f}$ sont immédiates. La propriété (4.3) pour $\hat{f}$ a été établie au Lemme 1. Finalement $\hat{f} \in \mathcal{PW}_r(G)$ et le Lemme 1 montre que l'application linéaire de $\mathcal{D}_r(G)$ dans $\mathcal{PW}_r(G)$, $f \mapsto \hat{f}$ est continue. Ceci prouve (ii). □

Soit T un opérateur dans un espace de Hilbert de dimension finie, E. Alors, on a:

$$\operatorname{Tr}(T^*T) \leq (\dim E)\|T\|^2. \tag{4.5}$$

Montrons:

(4.6) Il existe un élément du centre de $\mathbb{U}(\mathfrak{k})$, Ω, tel que pour tout $\delta \in \hat{K}$, le scalaire $\delta(\Omega)$ vérifie:

$$(\operatorname{Card} K/K^0)^{-2}(\dim \delta)^2 \leq \delta(\Omega) \leq (\dim \delta)^2.$$

Traitons d'abord le cas où $K = K^0$. Dans ce cas on voit (cf. e.g. [War, Th. 2.4.1.6]), qu'il existe un polynôme invariant sous-le groupe de Weyl tel que $(\dim \delta)^2$ soit donné par l'évaluation de ce polynôme sur le paramètre d'Harish-Chandra du caractère infinitésimal de δ. L'existence de Ω dans ce cas résulte de l'isomorphisme d'Harish-Chandra. Si $K \neq K^0$, la restriction de $\delta \in \hat{K}$ à K^0 est une somme directe de représentations irréductibles de mêmes dimensions, conjuguées par K/K^0. Leur nombre est inférieur ou égal à $\operatorname{Card} K/K^0$. Donc $\delta(\Omega)$ est un scalaire qui vérifie les propriétés voulues.

Montrons:

(4.7) Pour $L = MA \in \mathcal{L}$ et $\sigma \in \hat{M}_d$, la multiplicité de $\delta \in \hat{K}$ dans $I(\sigma)$ est inférieure à $\dim \delta$, donc la dimension de $I(\sigma)^\delta$ est inférieure ou égale à $(\dim \delta)^2$.

En plongeant σ dans une série principale minimale et en utilisant l'induction par étage, on se ramène à prouver l'assertion pour $M = M_{\min}$. La réciprocité de Frobenius conduit au résultat.

On note $P^\delta(\sigma)$ la projection orthogonale de $I(\sigma)$ ou $I^2(\sigma)$ sur $I(\sigma)^\delta$, qui est égale pour tout λ, à $\pi^P(\sigma,\lambda)(\chi_\delta)$.

Lemme 11. (i) *Si $\delta,\gamma \in \hat{K}$ et si $\phi \in \mathcal{PW}_r(G)$ on définit $\phi^{\delta\gamma}$ par:*

$$\phi^{\delta\gamma}(P,\sigma,\lambda) = P^\delta(\sigma)\phi(P,\sigma,\lambda)P^\gamma(\sigma),\ \ (P = MAN,\sigma,\lambda) \in \tilde{\Theta}.$$

Alors, pour tout $(P,\sigma,\lambda) \in \tilde{\Theta}$, on a:

$$\phi(P,\sigma,\lambda) = \sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} \phi(P,\sigma,\lambda)$$

où la série d'opérateurs dans $I^2(\sigma)$ converge simplement.

(ii) *On note $\phi \mapsto \psi$, l'application qui à $\phi \in \mathcal{PW}_r(G)$ associe la restriction, ψ, de ϕ aux triplets (P,σ,λ), où $(P,\sigma) \in \Theta$, $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$. Alors $\psi \in \mathcal{L}^2$ et l'application $\phi \mapsto \psi$ est une application linéaire continue de $\mathcal{PW}_r(G)$ dans $\mathcal{L}^2$.*

Démonstration. (i) résulte facilement du fait que les projecteurs $P^\delta(\sigma)$ dans $I^2(\sigma)$ sont des projecteurs sur des sous-espaces 2 à 2 orthogonaux, et que la série $\sum_{\delta\in\hat{K}} P^\delta(\sigma)$ converge simplement vers l'identité de $I^2(\sigma)$, d'après la théorie des représentations unitaires des groupes compacts.

(ii) Soit $p,n \in \mathbb{N}$. Alors, notant $\|\ \|$ la norme des opérateurs continus dans $I^2(\sigma)$, on a:

$$\|P^\delta(\sigma)\pi^P(\sigma,\lambda)(\Omega^{p+1})\phi(P,\sigma,\lambda)\pi^P(\sigma,\lambda)(\Omega^{p+1})P^\gamma(\sigma)\|$$

est inférieur ou égal à

$$\|\pi^P(\sigma,\lambda)(\Omega^{p+1})\phi(P,\sigma,\lambda)\pi^P(\sigma,\lambda)(\Omega^{p+1})\|.$$

Mais

$$P^\delta(\sigma)\pi^P(\sigma,\lambda)(\Omega^{p+1}) = C_\delta P^\delta(\sigma)$$

où $|C_\delta| \geq C(\dim\delta)^{2p+2}$, avec $C = (Card K/K^0)^{-2p-2}$ et de même pour γ. Alors on déduit de la définition de $\mathcal{PW}_r(G)$ et de (4.5), (4.7), qu'il existe une semi-norme continue sur cet espace, q, dépendant de p et n, mais indépendante de $\gamma,\delta \in \hat{K}$, telle que:

$$\begin{aligned}&\|\phi^{\delta\gamma}(P,\sigma,\lambda)\|_{\mathrm{HS}}\\ &\quad\leq q(\phi)(\dim\delta)^{-2p}(\dim\gamma)^{-2p}(1+\|\Lambda_\sigma\|^2+\|\lambda\|^2)^{-n},\ \ (P,\sigma,\lambda)\in\tilde{\Theta},\lambda\in i\mathfrak{a}^*.\end{aligned}$$

Utilisant (4.6) et [War, Lemme 4.4.2.3], qui est aussi valable pour notre Ω, on voit que, pour p assez grand, $\sum_{\delta\in\hat{K}}(\dim\delta)^{-2p}$ converge. Alors, on déduit de (4.1) (i) que la somme sur $\delta,\gamma \in \hat{K}$, des restrictions $\psi^{\delta\gamma}$ des $\phi^{\delta\gamma}$ aux $(P,\sigma,\lambda) \in$

$\tilde{\Theta}$ avec $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, converge dans $\mathcal{L}^2$ vers un élément ψ'. En outre, il existe une semi-norme continue sur $\mathcal{PW}_r(G)$, q', telle que:

$$\|\psi'\|_{\mathcal{L}^2} \leq q'(\phi), \;\; \phi \in \mathcal{PW}_r(G). \tag{4.8}$$

Mais $\phi(P,\sigma,\lambda) = \sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} \phi^{\delta\gamma}(P,\sigma,\lambda)$ où la série d'opérateurs converge simplement pour $(P,\sigma,\lambda) \in \tilde{\Theta}$, d'après le Lemme 10 (i). On a donc la même égalité en remplaçant ϕ par ψ et en prenant $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$. Mais la série $\sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} \psi^{\delta\gamma}$ converge vers ψ' dans $\mathcal{L}^2$, d'après la continuité de l'action de $K \times K$ sur $L^2(G)$ et donc sur $\mathcal{L}^2$, d'après (4.1) (iii). Comme toute suite qui converge dans $L^2(i\mathfrak{a}^*, \mu(P,\sigma,\lambda)d\lambda)$ vers une limite l, admet une sous-suite qui converge presque partout vers l, on déduit de ce qui précède, par considération de coefficients d'opérateurs dans $I^2(\sigma)$ par rapport à une base orthonormée de $I(\sigma)$, que $\psi' = \psi$. On vient donc de voir que $\psi \in \mathcal{L}^2$. Joint à (4.8), cela achève de prouver le Lemme. $\square$

LEMME 12. *Soit $\phi \in \mathcal{PW}_r(G)$.*

(i) *Pour $\delta,\gamma \in \hat{K}$, $\phi^{\delta\gamma}$ est un élément de $\mathcal{PW}_r(G,K)^{\delta\gamma}$. On note $f^{\delta\gamma}$ l'élément de $\mathcal{H}_r(G,K)$ tel que $(f^{\delta\gamma})\hat{} = \phi^{\delta\gamma}$, dont l'existence est assurée par le Théorème* 1.

(ii) *La série $\sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} f^{\delta\gamma}$ converge dans $L^2(G)$ vers un élément f.*

(iii) *On a $f \in \mathcal{D}_r(G)$ et $\hat{f} = \phi$.*

Démonstration. La propriété (3.1) pour $\phi^{\delta\gamma}$ résulte immédiatement des propriétés (4.2) et (4.3) pour ϕ. La propriété (3.2) résulte de (4.4) pour ϕ et de la Remarque 3. Donc $\phi^{\delta\gamma} \in \mathcal{PW}_r(G)^{\delta\gamma}$, ce qui achève de prouver (i).

Montrons (ii). Compte tenu de la formule de Plancherel (cf. (4.1)) et du fait (cf. preuve du Lemme précédent) que $\sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} \psi^{\delta\gamma}$ converge vers ψ dans $\mathcal{L}^2$, on voit que $\sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} f^{\delta\gamma}$ converge dans $L^2(G)$, ce qui prouve (ii).

Montrons (iii). Si $\phi \in \mathcal{PW}_r(G)$ et $u \in \mathbb{U}(\mathfrak{k}) \cup Z(\mathfrak{g})$, on voit facilement que $\pi_L(u)\phi \in \mathcal{PW}_r(G)$, où:

$$(\pi_L(u)\phi)(P,\sigma,\lambda) = \pi^P(\sigma,\lambda)(u)\phi(P,\sigma,\lambda), \;\; (P,\sigma,\lambda) \in \tilde{\Theta}.$$

Mais:

$$(\pi_L(u)\phi)^{\delta\gamma} = \pi_L(u)(\phi^{\delta\gamma}), \;\; u \in Z(\mathfrak{k}) \cup Z(\mathfrak{g}).$$

Par ailleurs, il résulte du Théorème 1 (ii):

$$(L_u f^{\delta\gamma})\hat{} = \pi_L(u)(\phi^{\delta\gamma}), u \in Z(\mathfrak{k}) \cup Z(\mathfrak{g}).$$

Par application de (ii) à $\pi_L(u)\phi$, on en déduit que $\sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} L_u f^{\delta\gamma}$ converge dans $L^2(G)$, pour $u \in Z(\mathfrak{k}) \cup Z(\mathfrak{g})$ et plus généralement dans l'algèbre engendrée par $Z(\mathfrak{k})$ et $Z(\mathfrak{g})$. On note $C_\mathfrak{g}$ (resp. $C_\mathfrak{k}$) le Casimir de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{k}$), relativement à B. Alors $\Delta := C_{\mathfrak{g}} - 2C_{\mathfrak{k}}$ est un élément de cette algèbre, qui est de plus un opérateur différentiel elliptique sur G. Ce qui précède montre que pour tout n,

$$\sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} \Delta^n f^{\delta\gamma} \text{ converge dans } L^2(G). \tag{4.9}$$

Comme $\sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} f^{\delta\gamma}$ converge vers f dans $L^2(G)$, $\sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} \Delta^n f^{\delta\gamma}$ converge faiblement vers $\Delta^n f$ dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(G)$. Tenant compte de (4.9), on en déduit que $\Delta^n f \in L^2(G)$. Alors, f est C^∞. Par ailleurs les $f^{\delta\gamma}$ sont à support dans B_r. Il en va de même de f.

Donc $f \in \mathcal{D}_r(G)$. D'après [War, Th. 4.4.4.2], c'est la somme, dans l'espace de Fréchet $\mathcal{D}_r(G)$, de sa série de Fourier sous $K \times K$, $\sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} \overline{f}^{\delta\gamma}$. Mais alors cette série est aussi sa série de Fourier dans $L^2(G)$. Or d'après (ii), $f = \sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} f^{\delta\gamma}$ dans $L^2(G)$. L'unicité de la série de Fourier montre que pour $\delta, \gamma \in \hat{K}$, $f^{\delta\gamma} = \overline{f}^{\delta\gamma}$. Donc $f = \sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} f^{\delta\gamma}$ dans $\mathcal{D}_r(G)$. Donc, d'aprés le Lemme 10 (ii):

$$\hat{f} = \sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} (f^{\delta\gamma})\check{}, \text{ dans } \mathcal{PW}_r(G)$$

et d'après le Lemme 10 (i), pour tout $(P, \sigma, \lambda) \in \tilde{\Theta}$, on a:

$$\hat{f}(P, \sigma, \lambda) = \sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} (f^{\delta\gamma})\check{}(P, \sigma, \lambda)$$

où la série converge simplement. Mais d'une part $(f^{\delta\gamma})\check{} = \phi^{\delta\gamma}$ et d'autre part, d'après le Lemme 11 (i), pour tout $(P, \sigma, \lambda) \in \tilde{\Theta}$, on a:

$$\phi(P, \sigma, \lambda) = \sum_{\delta,\gamma\in\hat{K}} \phi^{\delta\gamma}(P, \sigma, \lambda)$$

où la série d'opérateurs dans $I^2(\sigma)$ converge simplement. Donc $\hat{f} = \phi$. □

Théorème 2. *L'application de $\mathcal{D}_r(G)$ dans $\mathcal{PW}_r(G)$, $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme topologique entre ces espaces de Fréchet.*

Démonstration. La continuité de l'application résulte du Lemme 10 (ii). L'injectivité résulte par exemple de la formule de Plancherel. La surjectivité résulte du Lemme précédent. On conclut grâce au Théorème du graphe fermé pour les espaces de Fréchet. □

5. Appendice

5.1. *Une preuve de* (1.6), (1.7), (1.8) *dans le cas non connexe.* On a déjà donné des références pour le cas où G est connexe (voir aussi la sous-section suivante). On va en déduire le résultat dans le cas non connexe, à l'aide de résultats de [CD1] qu'on va rappeler.

On note M_m au lieu de $M_{\min}$. Soit Z_G(resp. Z_{M_m}) le centre de G (resp. M_m). On note $G^\sharp = G^0 Z_G$.

Il est clair que comme (1.6), (1.7) et (1.8) sont vrais pour G^0, ils le sont pour $G^\sharp$. On rappelle que $Z_{\mathbb{C}}(G)$ est le centralisateur de G dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. On note $F := Z_{M_m} \cap (Z_{\mathbb{C}}(G)\exp i\mathfrak{a}_m)$, qui est abélien. Alors $M = M^0 F$. On définit $P^\S = P \cap G^\sharp$, $M^\S = M \cap G^\sharp$, $F^\S = F \cap G^\sharp$. Alors $G^\sharp = G^0 F^\S$ et $M^\S$ est distingué dans M. On en déduit une action de M et F sur $(\hat{M}^0)_d$ et $(\hat{M}^\S)_d$. Soit $\sigma \in \hat{M}_d$. Alors (cf. [CD1, Lemme 10]):

(5.1) $$\sigma_{|M^\S} \approx \oplus_{i=0,\dots,n} \sigma_i$$

où les $\sigma_i \in (\hat{M}^\S)_d$ sont deux à deux inéquivalentes. L'ensemble des classes σ_i est l'orbite de la classe de σ_0 sous F et le stabilisateur de σ_0 dans F est $F' := F^\S(F \cap Z_M)$.

Par restriction des fonctions de K à $K^\sharp = K \cap G^\sharp$, on obtient un isomorphisme de $I(\sigma)$ avec $\oplus_{i=0,\dots,n} I(\sigma_i)$. On a alors, d'après les Lemmes 10, 11 de [CD1]:

(5.2) (i) Pour $f \in F$, $fI(\sigma_i) = I(f\sigma_i)$.

(ii) Pour $i \neq j$, $A(\sigma_i) \cap A(\sigma_j)$ est vide et les éléments de la réunion des $A(\sigma_i)$ sont des $K^\sharp$-types de même longueur.

(iii) Si $\mu_0 \in A(\sigma_0)$, le K-sous-module engendré par $I(\sigma_0)^{\mu_0}$ est irréductible. C'est un K-type minimal, μ, de $I(\sigma)$. Tout élément de $A(\sigma)$ est de cette forme. De plus $I(\sigma)^\mu$ est irréductible sous K et est une somme de $K^\sharp$-types minimaux des $I(\sigma_i)$.

D'autre part, d'après l.c., Lemme 12 et Lemme 16 (ii), on a:

(5.3) (i) $W_\sigma \subset W_{\sigma_0}$,

(ii) $W_\sigma^0 = W_{\sigma_0}^0$.

Alors R_σ apparait comme un sous-groupe de R_{σ_0}. On note $R_\sigma^\perp$ l'orthogonal de R_σ dans $\hat{R}_{\sigma_0}$. Alors (cf. l.c., Lemme 15), avec les notations de (4.2), on a:

(5.4) $$I(\sigma)^\mu \cap I(\sigma_0) = \oplus_{\beta \in R_\sigma^\perp \mu_0} I(\sigma_0)^\beta.$$

Alors (1.6) pour G résulte de (1.6) pour $G^\sharp$ et de (5.2). Montrons (1.7). On suppose $\mathrm{Re}\,\lambda \in \overline{C}_P$ (resp. $-\overline{C}_P$). Grâce à (5.2) on voit que les orbites sous F des $(\mathfrak{g}, K^\sharp)$-sous-modules intervenant dans la décomposition de (1.7) pour $G^\sharp$ permettent d'obtenir la décomposition de (1.7) pour G. De plus, tout $(\mathfrak{g}, K)$-quotient (resp. sous-module) simple de $I^P(\sigma,\lambda)$ est somme directe de $(\mathfrak{g}, K^\sharp)$-quotients (resp. sous-modules) simples des $I^P(\sigma_i,\lambda)$, et égal à l'espace engendré par l'orbite sous F d'un quotient simple $J(\sigma_0,\lambda)(\mu_0)$, pour un $\mu_0 \in A(\sigma_0)$. Avec les notations de (5.2), il est donc engendré comme $(\mathfrak{g}, K)$-module par

$I(\sigma)^\mu$. Il l'est aussi comme $(\mathfrak{g}, K^\sharp)$-module. Donc ce quotient (resp. sous-module) simple est de la forme $J(\sigma,\lambda)(\mu)$, où $\mu \in A(\sigma)$ contient μ_0 et vérifie:

$$J(\sigma,\lambda)(\mu) = \oplus_{i=0,\dots,n} V_i \tag{5.5}$$

où V_i est une somme directe de quotients (resp. sous-modules) simples de $I^{P^\S}(\sigma_i,\lambda)$. De plus:

$$V_0 = \oplus_{\beta \in R_\sigma^\perp \mu_0} J(\sigma,\lambda)(\beta). \tag{5.6}$$

Clairement $J(\sigma,\lambda)(\mu)$ et $J(\sigma,\lambda)(\mu')$ sont égaux si les espaces V_0 et V_0' ont une intersection non nulle.

Définissons une action de $\hat{R}_\sigma$ sur $A(\sigma)$. D'abord, d'après (5.2) et (5.4) on a:

$$A(\sigma) \approx A(\sigma_0)/R_\sigma^\perp. \tag{5.7}$$

Comme $\hat{R}_{\sigma_0}$ agit simplement transitivement sur $A(\sigma_0)$ et que $\hat{R}_\sigma$ est naturellement isomorphe à $\hat{R}_{\sigma_0}/R_\sigma^\perp$, on en déduit une action simplement transitive de $\hat{R}_\sigma$ sur $A(\sigma)$. Etudions maintenant l'égalité, pour $\mu, \mu' \in A(\sigma)$:

$$J(\sigma,\lambda)(\mu) = J(\sigma,\lambda)(\mu'). \tag{5.8}$$

On identifie, d'après (5.7), μ (resp. μ') a une orbite O (resp. O') de $R_\sigma^\perp$ dans $A(\sigma_0)$. D'après ce qui précéde, (5.8) équivaut au fait qu'un élément μ_0 de O et un élément μ_0' de O' vérifient:

$$J(\sigma_0,\lambda)(\mu_0) = J(\sigma_0,\lambda)(\mu_0').$$

D'après (1.8) pour $G^\sharp$, cela équivaut à:

$$\mu_0' \in \hat{R}_{\sigma_0}(\lambda)\mu_0.$$

Ceci équivaut à:

$$O' \subset \hat{R}_{\sigma_0}(\lambda)O. \tag{5.9}$$

Mais, on a $R_{\sigma,\lambda} = R_{\sigma_0,\lambda} \cap R_\sigma$. On veut prendre l'orthogonal dans $\hat{R}_{\sigma_0}$. Or R_{σ_0} est un produit de copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc est un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et tout sous-groupe est un sous-espace vectoriel. Donc, par l'algèbre linéaire, on déduit:

$$R_{\sigma,\lambda}^\perp = \hat{R}_{\sigma_0}(\lambda) R_\sigma^\perp. \tag{5.10}$$

Par ailleurs la projection de $\hat{R}_{\sigma_0}$ sur $\hat{R}_\sigma$ envoie $R_{\sigma,\lambda}^\perp$ sur $\hat{R}_\sigma(\lambda)$. Ceci, joint à (5.9), (5.10) et à la définition de l'action de $\hat{R}_\sigma$ sur $A(\sigma)$, achève de montrer que (5.8) est équivalent à:

$$\mu' \in \hat{R}_\sigma(\lambda)\mu.$$

Ceci achève de prouver (1.8) pour G. $\square$

5.2. *Compléments sur les résultats* (1.8) *dans le cas où* G *est connexe.* La référence pour (1.8) au Théorème 12.1 de [V2] repose sur la comparaison de deux sous-groupes de $W(A)$, W_δ et $W_{\tilde{\gamma}}$, que nous explicitons ci-dessous. Les notations renvoient aux notations du Théorème 12.1 de [V2] et de [V1, §7]. Soit $\delta \in \hat{M}_d$. Dans [V1, p. 49], on prend $\tilde{\mathfrak{l}} = \mathfrak{l}$, car δ est une série discrète. Soit $w \in W(A)$. On note encore w un représentant de w dans $N_K(\mathfrak{a})$, qu'on peut choisir dans le normalisateur de $\mathfrak{t}_0$. Alors w normalise T^+ qui par définition est égal à $M^{\mathfrak{t}_0^+}$ (cf. [V1, début de §7]) et est égal à $M_{\tilde{L}}$ (cf. [V1, Prop. 7.2 et p. 49]). D'autre part w normalise F d'après la définition de celui-ci, donc aussi $M^\S$ (cf. [V1, Déf. 7.1]). L'association (cf. p. 49 de [V1]) qui à σ associe un petit $M_{\tilde{L}}$-type $\tilde{\gamma}$ (ou $\tilde{\gamma}_\delta$) ne dépend que de l'ensemble Ψ de racines positives dans la construction. On le notera $\tilde{\gamma}_\delta(\Psi)$. Notez qu'ici λ est strictement Ψ-dominant car δ est une série discréte. Montrons que:

$$\tilde{\gamma}_{w\delta}(w\Psi) = w\tilde{\gamma}_\delta(\Psi). \tag{5.11}$$

D'après [V1, Lemme 7.4, et sa preuve, et Cor. 7.5], on a:

$$\delta_{|M^\S} = \oplus_i \delta(\Psi_i, \lambda_i) \otimes \delta_i^-$$

les Ψ_i contenant tous un ensemble de racines positives fixé de $\Delta(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{k})$ et étant distincts deux à deux. Cet ensemble de racines positives de $\Delta(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{k})$ étant fixé, l'ensemble des Ψ_i est unique, d'après les propriétés des séries discrètes. Donc:

$$w\delta_{|M^\S} = \oplus_i \delta(w\Psi_i, w\lambda_i) \otimes w\delta_i^-.$$

Alors (5.11) résulte de la définition de $\tilde{\gamma}_\delta(\Psi)$. Maintenant si $w \in W_\delta$, on peut trouver un représentant comme ci-dessus stabilisant Ψ (cf. [K, Th. 3.7]). Alors, notant $\tilde{\gamma} := \tilde{\gamma}_\delta(\Psi)$ on a, grâce à (5.11):

$$w\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}.$$

En particulier, grâce à la définition de $\tilde{\gamma}_\delta(\Psi)$ et au Lemme 7.4 de [V1], on en déduit que $w\lambda = \lambda$. Alors w est un élément du centralisateur dans G de λ. Comme $\mathfrak{b}$ est défini par λ, ce centralisateur est d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_0$. Mais ce centralisateur est connexe car G est connexe (cf. par exemple l'argument dans [V1, après la Proposition 2.8]). Donc $w \in L$. Donc $w \in W_{\tilde{\gamma}}$, avec les notations de [V2, Th. 12.1].

Réciproquement, si $w \in W_{\tilde{\gamma}}$, on a $w\lambda = \lambda$, donc $w(\Psi) = \Psi$. Alors (5.11) joint à l'hypothèse montre que:

$$\tilde{\gamma}_{w\delta}(\Psi) = \tilde{\gamma}_\delta(\Psi).$$

Mais $\tilde{\gamma} := \tilde{\gamma}_\delta(\Psi)$ détermine δ, car il détermine d'abord μ^+, à l'aide de son plus haut poids, par restriction de $\tilde{\gamma}$ à T_0^+. Enfin la restriction de $\tilde{\gamma}$ à F est un multiple de δ^-. D'où l'on déduit l'identité voulue:

$$W_\delta = W_{\tilde{\gamma}}. \tag{5.12}$$

Institut de Mathématiques de Luminy, Marseille, France
E-mail address: delorme@iml.univ-mrs.fr

Bibliographie

[A] J. Arthur, A Paley-Wiener theorem for real reductive groups, *Acta Math.* **150** (1983), 1–89.

[BS] E. P. van den Ban and H. Schlichtkrull, A Paley-Wiener theorem for reductive symmetric spaces, preprint; arXiv:math.RT/0302232.

[BoWall] A. Borel and N. Wallach, *Continuous Cohomology*, *Discrete Subgroups*, *and Representations of Reductive Groups*, Second edition, *Mathematical Surveys and Monographs* **67**, A. M. S., Providence, RI, 2000.

[Bou] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique*, *Fasc.* XXXVI, *Variétés Différentielles et Analytiques*, *Fascicule de Résultats*, *Actualité Scientifiques et Industrielles* **1347**, Hermann, Paris, 1971.

[Cam] O. Campoli, Paley-Wiener type theorems for rank-1 semisimple Lie groups, *Rev. Un. Mat. Argentina* **29** (1979/80), 197–221.

[Cass] W. Casselman, Canonical extensions of Harish-Chandra modules to representations of G, *Canadian J. Math.* **41** (1989), 385–438.

[CassM] W. Casselman and D. Milicic, Asymptotic behavior of matrix coefficients of admissible representations, *Duke Math. J*. **49** (1982), 869–930.

[CD1] L. Clozel et P. Delorme, Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs, *Invent. Math.* **77** (1984), 427–453.

[CD2] ———, Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs. II, *Ann. Sci. École Norm. Sup*. **23** (1990), 193–228.

[Co] M. Cowling, On the Paley-Wiener theorem, *Invent. Math.* **83** (1986), 403–404.

[D1] P. Delorme, Théorème de type Paley-Wiener pour les groupes de Lie semi-simples réels avec une seule classe de conjugaison de sous groupes de Cartan, *J. Funct. Anal*. **47** (1982), 26–63.

[D2] ———, Homomorphismes de Harish-Chandra liés aux K-types minimaux des séries principales généralisées des groupes de Lie réductifs connexes, *Ann. Sci. École Norm. Sup*. **17** (1984), 117–156.

[D3] ———, Multipliers for the convolution algebra of left and right K-finite compactly supported smooth functions on a semisimple Lie group, *Invent. Math.* **75** (1984), 9–23.

[D4] ———, Espaces de coefficients de représentations iadmissibles d'un groupe réductif p-adique. Noncommutative harmonic analysis (In honor of J. Carmona), *Progr. Math*. **220**, 131–176, Birkhäuser, Boston, Boston, MA, 2004.

[DF-J] P. Delorme and M. Flensted-Jensen, Towards a Paley-Wiener theorem for semisimple symmetric spaces, *Acta Math.* **167** (1991), 127–151.

[DSou] P. Delorme and S. Souaifi, Filtration de certains espaces de fonctions sur un espace symétrique réductif, *J. Funct. Anal*. **217**(2004), 314–346.

[Du] M. Duflo, Représentations irréductibles des groupes semi-simples complexes. Analyse harmonique sur les groupes de Lie (Sém., Nancy-Strasbourg, 1973–75), *Lecture Notes in Math.* **497**, 26–88, Springer-Verlag, New York, 1974.

[E] L. Ehrenpreis, *Fourier Analysis in Several Complex Variables*, *Pure and Applied Math.* **XVII**, Wiley-Interscience Publishers, New York, 1970.

[H-C] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups. III. The Maass-Selberg relations and the Plancherel formula, *Ann. of Math.* **104** (1976), 117–201.

[K] A. W. Knapp, Commutativity of intertwining operators for semisimple groups, *Compositio Math.* **46** (1982), 33–84.

[KSt] A. W. Knapp and E. M. Stein, Intertwining operators for semisimple groups. II, *Invent. Math.* **60** (1980), 9–84.

[KV] A. W. Knapp and D. A. Vogan, Jr., *Cohomological Induction and Unitary Representations*, *Princeton Math. Series* **45**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.

[Sou] S. Souaifi, Fonctions $\mathbb{D}(G/H)$-finies sur un espace symétrique réductif, *J. Funct. Anal.* **195** (2002), 371–443.

[V1] D. A. Vogan, Jr., The algebraic structure of the representation of semisimple Lie groups. I, *Ann. of Math.* **109** (1979), 1–60.

[V2] ———, The algebraic structure of the representation of semisimple Lie groups. II, preprint.

[V3] ———, *Representations of Real Reductive Lie groups*, *Progress in Mathematics* **15**, Birkhäuser, Boston, Mass., 1981.

[W] J.-L. Waldspurger, Cohomologie des espaces de formes automorphes (d'aprés J. Franke), *Séminaire Bourbaki* (1995/96), *Astérisque* **241** (1997), Exp. No. 809, 139–156.

[Wall] N. R. Wallach, *Real Reductive Groups*. II, *Pure and Applied Mathematics* **132-II**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[War] G. Warner, Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. I, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Band **188**, Springer-Verlag, New York, 1972.

[Z] D. P. Zelobenko, Complex harmonic analysis on semisimple Lie groups, *Proc. Internat. Congress of Mathematicians* (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 2, pp. 129–134, Canadian Math. Congress, Montreal, Que., 1975.

(Received December 27, 2003)