Annals of Mathematics, **161** (2005), 1637–1644

Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle

By Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony

Abstract

Let X be a complex projective manifold and let f be a dominating rational map from X onto X. We show that the topological entropy $\mathrm{h}(f)$ of f is bounded from above by the logarithm of its maximal dynamical degree.

Soit X une variété projective complexe de dimension $k \geq 2$, munie d'une forme de Kähler ω normalisée par $\int_X \omega^k = 1$. Soit $f : X \longrightarrow X$ une application rationnelle dominante, *c.-à-d.* localement ouverte en un point générique de X. Notons $\lambda_l(f)$ le degré dynamique d'ordre l de f, $1 \leq l \leq k$, et $\mathrm{h}(f)$ l'entropie topologique de f. Ils sont définis plus loin. Il s'agit de montrer que $\mathrm{h}(f) \leq \max_{1\leq l\leq k} \log \lambda_l(f)$.

Un intermédiaire utile est $\mathrm{lov}(f)$, c'est un indicateur de la croissance du volume des graphes des itérés de f. Plus précisément, soit Γ_n le graphe de l'application $(f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ où $f^i := f \circ \cdots \circ f$ (i fois). On pose

$$\mathrm{lov}(f) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{vol}(\Gamma_n).$$

Utilisant une inégalité de Lelong, Gromov [11] (voir aussi Newhouse [16]) a montré que $\mathrm{h}(f) \leq \mathrm{lov}(f)$ lorsque f est holomorphe. Sa preuve reste valable pour les applications rationnelles. Nous allons montrer l'égalité $\mathrm{lov}(f) = \max_{1\leq l\leq k} \log \lambda_l(f)$, qui est facile dans le cas holomorphe [11], et en déduire le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit X une variété projective complexe de dimension $k \geq 2$ et soit $f : X \longrightarrow X$ une application rationnelle dominante. Alors*

$$\mathrm{h}(f) \leq \mathrm{lov}(f) = \max_{1\leq l\leq k} \log \lambda_l(f).$$

Un résultat plus faible a été annoncé dans [10]. L'auteur utilise l'inégalité $(f\circ f)^* \leq f^* \circ f^*$ [10, Lemma 3] qui n'est pas valable lorsque ces opérateurs agissent sur les cycles analytiques. Un contre-exemple est donné dans [12]. Dans notre approche, si S est un courant positif fermé, on définit $f^*(S)$ uniquement là où f est localement biholomorphe; puis on considère son extension par zéro. Le produit des courants n'est considéré que là où ils sont lisses.

Rappelons quelques notions (*voir* par exemple [1], [18], [17], [7], [12]). Notons Γ le graphe de f dans $X \times X$. C'est un sous-ensemble analytique irréductible de dimension k. Lelong a montré que l'intégration sur la partie régulière de Γ définit un courant positif fermé $[\Gamma]$ de bidimension (k,k). Soient π_1 et π_2 les projections de $X \times X$ sur le premier et le second facteurs. Pour tout ensemble $Y \subset X$, posons

$$f(Y) := \pi_2(\pi_1^{-1}(Y) \cap \Gamma) \ \text{ et } \ f^{-1}(Y) := \pi_1(\pi_2^{-1}(Y) \cap \Gamma).$$

Notons I_f l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\dim \pi_1^{-1}(x) \cap \Gamma \geq 1$. C'est *l'ensemble des points d'indétermination de* f. Il est de codimension au moins 2. On a $\dim \pi_1^{-1}(I_f) \cap \Gamma \leq k-1$. Pour toute forme φ lisse de bidegré (l,l) posons

$$f^*(\varphi) := (\pi_1)_*(\pi_2^*(\varphi) \wedge [\Gamma]) \tag{1}$$

Le courant $f^*(\varphi)$ est lisse sur $X \setminus I_f$. Puisqu'il est de masse finie et sans masse sur I_f, ses coefficients sont dans L^1. En particulier, $f^*(\varphi)$ ne charge pas les sous-ensembles analytiques propres de X. L'opérateur f^* est continu de l'espace des formes lisses dans l'espace des formes à coefficients dans L^1.

Posons $\delta_l(f) := \int_X f^*(\omega^l) \wedge \omega^{k-l}$ pour $1 \leq l \leq k$. On définit *le degré dynamique d'ordre* l de f par

$$\lambda_l(f) := \limsup_{n\to\infty} [\delta_l(f^n)]^{1/n}.$$

On verra que la suite $[\delta_l(f^n)]^{1/n}$ est toujours convergente (corollaire 7). *Le degré topologique* $d_t := \lambda_k(f)$ est égal au nombre de préimages par f d'un point générique de X.

Soit

$$\Omega_f := X \setminus \cup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(I_f).$$

C'est un ensemble invariant par f et f^{-1} et son complémentaire est une réunion finie ou dénombrable d'ensembles analytiques de dimension au plus $k-1$. On dira qu'une famille $F \subset \Omega_f$ est (n,ε)-*séparée*, $\varepsilon > 0$, si

$$\max_{0\leq i\leq n-1} \mathrm{dist}(f^i(x), f^i(y)) \geq \varepsilon \ \text{ pour } \ x, y \in F \text{ distincts}.$$

L'entropie topologique (*voir* [1]) $\mathrm{h}(f)$ est définie par

$$\mathrm{h}(f) := \sup_{\varepsilon>0} \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \max \left\{ \#F,\ F\ (n,\varepsilon)\text{-séparée} \right\} \right).$$

Notons Γ_n l'adhérence dans X^n de l'ensemble des points

$$(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)), \quad x \in \Omega_f.$$

C'est un sous-ensemble analytique de dimension k de X^n. Soient Π_i les projections de X^n sur ses facteurs, $0 \leq i \leq n-1$. On munit X^n de la forme de Kähler $\omega_n := \sum \Pi_i^*(\omega)$. On a

$$\operatorname{lov}(f) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\operatorname{vol}(\Gamma_n)) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\int_{\Gamma_n} \omega_n^k\right).$$

On verra plus loin que la suite $\left(\frac{1}{n}\log\int_{\Gamma_n}\omega_n^k\right)$ est toujours convergente. Utilisant une inégalité de Lelong, Gromov [11] a montré que $\mathrm{h}(f) \leq \operatorname{lov}(f)$. Dans la suite, nous montrons que $\operatorname{lov}(f) = \max\log\lambda_l(f)$.

Pour tout courant positif fermé de bidegré (l,l) sur X, notons $\|S\| := \int_X S\wedge\omega^{k-l}$ *la masse* de S. Puisqu'on a supposé $\int_X \omega^k = 1$, les courants ω^l sont de masse 1. Pour les résultats fondamentaux sur les courants positifs fermés nous renvoyons à Lelong [14] et Demailly [4]. Notre outil principal est le lemme suivant.

Lemme 2. *Il existe une constante $c > 0$, qui ne dépend que de (X,ω), telle que pour tout courant positif fermé S de bidegré (l,l) sur X on puisse trouver une suite de courants positifs fermés lisses $(S_m)_{m\geq 1}$, de bidegré (l,l), vérifiant les propriétés suivantes*:

(1) *La suite (S_m) converge vers un courant positif fermé S'.*

(2) *$S' \geq S$, c'est-à-dire que le courant $S' - S$ est positif.*

(3) *On a $\|S_m\| \leq c\|S\|$ pour tout $m \geq 1$.*

Preuve. Soit ω_{FS} la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^k$ normalisée par $\int_{\mathbb{P}^k}\omega_{\mathrm{FS}}^k = 1$. Rappelons que les groupes de cohomologie $H^{l,l}(\mathbb{P}^k,\mathbb{C})$ sont de dimension 1. En particulier, tout courant positif fermé R de bidegré (l,l) sur $\mathbb{P}^k$ est cohomologue à $\|R\|\omega_{\mathrm{FS}}^l$.

Puisque X est projective, on peut choisir une famille finie d'applications holomorphes surjectives Ψ_i, $1 \leq i \leq s$, de X dans $\mathbb{P}^k$ telles qu'en tout point $x \in X$ au moins l'une des applications Ψ_i soit de rang maximal. Il suffit de plonger X dans un $\mathbb{P}^N$ et de prendre une famille de projections centrales sur $\mathbb{P}^k$. Posons $T_i := (\Psi_i)_*(S)$. L'opérateur $(\Psi_i)_*$ étant continu, il existe une constante $c_1 > 0$ indépendante de S telle que $\|T_i\| \leq c_1\|S\|$.

La variété $\mathbb{P}^k$ étant homogène, si R est un courant positif fermé dans $\mathbb{P}^k$, il existe des courants positifs fermés lisses (R_m) tendant vers R avec $\|R_m\| = \|R\|$. Donc il existe des courants positifs fermés lisses $T_{i,m}$ de bidegré (l,l) sur $\mathbb{P}^k$ qui convergent faiblement vers T_i et qui vérifient $\|T_{i,m}\| = \|T_i\|$. On a $\|T_{i,m}\| \leq c_1\|S\|$.

Posons $S_m := \sum_{i=1}^s (\Psi_i)^*(T_{i,m})$. Estimons la masse de $(\Psi_i)^*(T_{i,m})$:

$$\begin{aligned}\|(\Psi_i)^*(T_{i,m})\| &= \int_X (\Psi_i)^*(T_{i,m}) \wedge \omega^{k-l} \\ &= \|T_{i,m}\| \int_X (\Psi_i)^*(\omega_{\mathrm{FS}}^l) \wedge \omega^{k-l} \\ &\leq c_1 \|S\| \int_X (\Psi_i)^*(\omega_{\mathrm{FS}}^l) \wedge \omega^{k-l} \\ &\leq c_2 \|S\|\end{aligned}$$

pour une constante $c_2 > 0$ indépendante de S. Donc la masse de S_m est majorée par $c\|S\|$ avec $c := sc_2$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite (S_m) tend faiblement vers un courant S'. Au voisinage de chaque point $x \in X$, on vérifie, puisque l'un des Ψ_i est un biholomorphisme local, que $S' - S$ est positif. On peut bien sûr choisir les constantes c_1, c_2 et c indépendantes de l, $1 \leq l \leq k$. □

Remarque 3. L'ensemble des classes de courants positif fermés de bidegré (l, l) et de masse 1 est borné dans $H^{l,l}(X, \mathbb{C})$. Il existe donc une constante $\alpha_X > 0$ telle que la classe de $\alpha_X \omega^l - T$ soit représentée par une forme lisse positive fermée pour tout courant positif fermé T de bidegré (l, l) et de masse plus petite ou égale à 1. On dira que T est *cohomologiquement dominé* par $\alpha_X \omega^l$. La propriété ci-dessus est valable pour toute variété kählérienne compacte. Dans le lemme 2, les courants S_m sont cohomologiquement dominés par $c_X \|S\| \omega^l$ où $c_X := c\alpha_X$.

Notons $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des points au voisinage desquels f n'est pas une application holomorphe localement inversible. Posons $\Omega_{1,f} := X \setminus \mathcal{C}_f$. C'est un ouvert de Zariski de X. Nous allons définir $f^*(S)$ lorsque S est un courant positif fermé de bidegré (l, l) sur X. Le courant $f^*(S)$ est bien défini sur $\Omega_{1,f}$. Si sa masse sur $\Omega_{1,f}$, qui est égale à $\|f^*(S)\| = \int_{\Omega_{1,f}} f^*(S) \wedge \omega^{k-l}$, est finie, d'après Skoda [19], son prolongement trivial $\widetilde{f^*(S)}$ est un courant positif fermé sur X. Le lemme suivant montre que c'est le cas. Nous utilisons par la suite cette extension par zéro de $f^*(S)$.

Lemme 4. *Soit S un courant positif fermé de bidegré (l, l) sur X. Alors $\|f^*(S)\| \leq c_X \delta_l(f) \|S\|$. En particulier, $\widetilde{f^*(S)}$ est positif fermé dans X et sa masse est bornée par $c_X \delta_l(f) \|S\|$.*

Preuve. Soit (S_m) la suite de courants lisses vérifiant le lemme 2 (appliqué au courant S). D'après la remarque 3, ces courants sont cohomologiquement dominés par $c_X \|S\| \omega^l$. On en déduit que la masse de $f^*(S_m)$, qui se calcule cohomologiquement, est majorée par $c_X \delta_l(f) \|S\|$. On a pour tout compact $K \subset \Omega_{1,f}$

$$\begin{aligned}\int_K f^*(S)\wedge\omega^{k-l} &\leq \int_K f^*(S')\wedge\omega^{k-l} \leq \limsup_{m\to\infty}\int_X f^*(S_m)\wedge\omega^{k-l}\\ &\leq c_X\|S\|\int_X f^*(\omega^l)\wedge\omega^{k-l} = c_X\delta_l(f)\|S\|.\end{aligned}$$

Ceci implique le lemme. □

Lemme 5. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ telle qu'on ait*

$$\int_{\Omega_f}(f^{n_1})^*\omega\wedge\cdots\wedge(f^{n_k})^*\omega \leq c_\varepsilon\big(\max_{1\leq l\leq k}\lambda_l(f)+\varepsilon\big)^{n_1}$$

pour tous les entiers naturels $n_1,\ldots,n_k$ vérifiant $n_1\geq\cdots\geq n_k\geq 0$.

Preuve. Posons $\lambda_\varepsilon := \max_{1\leq l\leq k}\lambda_l(f)+\varepsilon$. Soit $c > 0$ une constante telle que $\delta_l(f^n)\leq c\lambda_\varepsilon^n$ pour tout $n\geq 0$ et pour tout l avec $1\leq l\leq k$. Soit $\Omega_{n,f} := X\setminus\cup_{0\leq i\leq n-1}f^{-i}(\mathcal{C}_f)$. C'est un ouvert de Zariski de X. Montrons par récurrence sur s, $0\leq s\leq k$, que pour tous $n_1,\ldots,n_s$ vérifiant $n_1\geq\cdots\geq n_s\geq 0$ on a $\|T_s\|\leq c^s c_X^s\lambda_\varepsilon^{n_1}$, c_X étant la constante de la remarque 3 et

$$T_s := (f^{n_1})^*\omega\wedge\cdots\wedge(f^{n_s})^*\omega,\qquad T_0 := 1.$$

C'est clair au rang $s = 0$. Supposons le au rang $s-1$, $1\leq s\leq k$. On a $\|T'_{s-1}\|\leq c^{s-1}c_X^{s-1}\lambda_\varepsilon^{n_1-n_s}$ où

$$T'_{s-1} := (f^{n_1-n_s})^*\omega\wedge\cdots\wedge(f^{n_{s-1}-n_s})^*\omega,\qquad T'_0 := 1.$$

Le courant T'_{s-1} étant de masse finie sur $\Omega_{n_1-n_s,f}$, d'après le théorème de Skoda [19], son prolongement trivial $\widetilde{T'_{s-1}}$ dans X est un courant positif fermé dont la masse est majorée par $c^{s-1}c_X^{s-1}\lambda_\varepsilon^{n_1-n_s}$. Utilisant le lemme 4 appliqué au courant $S := \widetilde{T'_{s-1}}\wedge\omega$ et à l'application f^{n_s}, on obtient

$$\|T_s\| = \|(f^{n_s})^*(T'_{s-1}\wedge\omega)\|\leq c_X\delta_s(f^{n_s})\|T'_{s-1}\|\leq c^s c_X^s\lambda_\varepsilon^{n_1}.$$

Ceci termine la récurrence. Pour $s = k$, on obtient le lemme avec $c_\varepsilon := c^k c_X^k$. □

Fin de la démonstration du théorème 1. Il nous faut estimer $\mathrm{lov}(f)$. D'après le lemme 5, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\Gamma_n) &= \frac{1}{k!}\int_{\Gamma_n}\omega_n^k = \frac{1}{k!}\sum_{0\leq i_1,\ldots,i_k\leq n-1}\int_{\Gamma_n}\Pi_{i_1}^*(\omega)\wedge\cdots\wedge\Pi_{i_k}^*(\omega)\\ &= \frac{1}{k!}\sum_{0\leq i_1,\ldots,i_k\leq n-1}\int_{\Omega_f}(f^{i_1})^*\omega\wedge\cdots\wedge(f^{i_k})^*\omega\\ &\leq c_\varepsilon n^k\big(\max_{1\leq l\leq k}\lambda_l(f)+\varepsilon\big)^{n-1},\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{lov}(f) \leq \max_{1\leq l\leq k} \log \lambda_l(f)$. On a aussi $\mathrm{lov}(f) \geq \max_{1\leq l\leq k} \log \lambda_l(f)$ car

$$\mathrm{vol}(\Gamma_n) \geq \frac{1}{k!}\int_{\Omega_f} (f^{n-1})^*\omega^l \wedge \omega^{k-l} = \frac{1}{k!}\delta_l(f^{n-1}). \qquad \square$$

Proposition 6. *Soient f et g deux applications rationnelles de X dans X. On a*

$$\delta_l(f\circ g) \leq c_X \delta_l(f)\delta_l(g).$$

Preuve. Par définition de $\delta_l(f)$, on a $\|f^*\omega^l\| = \delta_l(f)$. Le courant $(f\circ g)^*\omega^l$, qui ne charge pas les sous-ensembles analytiques propres de X, est égal à $g^*(\widetilde{f^*\omega^l})$ sur $\Omega_{1,g}\cap\Omega_{1,f\circ g}$. Le lemme 4, appliqué à g et au courant $\widetilde{f^*\omega^l}$, entraîne que

$$\delta_l(f\circ g) = \|g^*(\widetilde{f^*\omega^l})\| \leq c_X\delta_l(g)\|f^*\omega^l\| = c_X\delta_l(f)\delta_l(g). \qquad \square$$

Corollaire 7. *La suite $[\delta_l(f^n)]^{1/n}$ est convergente. Les degrés dynamiques $\lambda_l(f)$ de f sont des invariants birationnels.*

Preuve. D'après la proposition 6, on a $\delta_l(f^{m+n}) \leq c_X\delta_l(f^m)\delta_l(f^n)$ pour tous $m,n\geq 1$. Ceci implique que la suite $[\delta_l(f^n)]^{1/n}$ converge vers $\inf_{n\geq 1}[\delta_l(f^n)]^{1/n}$.

Soit g une application birationnelle de X dans X. Posons $h := g\circ f\circ g^{-1}$. On a

$$\delta_l(h^n) = \delta_l(g\circ f^n\circ g^{-1}) \leq c_X^2\delta_l(g)\delta_l(g^{-1})\delta_l(f^n).$$

Donc $\lambda_l(h)\leq\lambda_l(f)$. Puisque $f = g^{-1}\circ h\circ g$, on a aussi $\lambda_l(f)\leq\lambda_l(h)$. Notons que ceci reste valable lorsque $g : X\to Y$ est une application birationnelle entre différentes variétés projectives. $\square$

Remarques 8. a. Russakovskii et Shiffman [17] ont montré l'inégalité $\delta_l(f\circ g)\leq\delta_l(f)\delta_l(g)$ lorsque $X = \mathbb{P}^k$. Diller et Favre [5] ont décrit précisément la croissance de $\delta_1(f^l)$ lorsque f est une application biméromorphe sur une surface complexe compacte. Le cas des applications d'allure polynomiale est traité dans [7]. Dans le cas de dimension $k\leq 3$ et pour les variétés homogènes, des résultats analogues sont obtenus par Guedj [12]. Il a alors prouvé l'existence d'une unique mesure invariante d'entropie maximale $\log d_t(f)$ lorsque $d_t(f) > \lambda_l(f)$, $1\leq l\leq k-1$ (*voir* Briend-Duval [2] et [6], [7], [8] pour la méthode géométrique, [7], [9] pour la méthode de dd^c). Le théorème 1 permet d'étendre ce résultat au cas d'une variété projective quelconque.

b. D'après Iskovskih-Manin [13], il existe des variétés X lisses non rationnelles de dimension 3 dans $\mathbb{P}^4$ qui sont unirationelles, *c.-à-d.* pour lesquelles il existe une application rationnelle de rang maximal $f : \mathbb{P}^3 \longrightarrow X$. On peut donc composer une projection holomorphe g de X sur $\mathbb{P}^3$ avec f pour obtenir beaucoup d'applications rationnelles dynamiquement intéressantes sur X. Nous remercions F. Campana et N. Mok qui nous ont indiqué ces exemples.

Il est par ailleurs facile de construire des correspondances sur les variétés projectives (*voir* par exemple [3], [20], [6], [9]). La proposition 6 et le corollaire 7 restent valables pour les correspondances. Rappelons qu'une correspondance sur X est la donnée d'un ensemble analytique $\Gamma \subset X \times X$ de dimension k dont les images de chaque composante par π_1 et π_2 sont égales à X. On peut poser $f := \pi_2 \circ (\pi_{1|\Gamma})^{-1}$. L'image réciproque d'une forme lisse est définie par l'équation (1). Les degrés dynamiques sont définis de façon analogue au cas des applications rationnelles.

c. Soit $\pi : Y \longrightarrow X$ une application holomorphe surjective où X et Y sont des variétés projectives complexes. Soit T un courant positif fermé sur X. L'image réciproque $\pi^*(T)$ de T par π est bien définie sur un ouvert de Zariski de Y (là où f est une submersion locale). Le lemme 2 permet de prolonger $\pi^*(T)$ en courant positif fermé $\widetilde{\pi^*(T)}$ dans Y. L'opérateur $T \mapsto \widetilde{\pi^*(T)}$ est semi-continu inférieurement. Plus précisément, si $T_n \to T$, toute valeur d'adhérence τ de la suite $(\widetilde{\pi^*(T_n)})$ vérifie $\tau \geq \widetilde{\pi^*(T)}$. Cette définition est utile dans le cadre des courants dynamiques. Notons que Méo [15] a donné un exemple qui montre qu'on ne peut pas toujours définir $\pi^*(T)$ dans le cas où X et Y ne sont pas compactes. Il a aussi donné une définition de $\pi^*(T)$ dans le cas local et lorsque π est une application à fibres discrètes. L'indépendance des coordonnées n'a pas été démontrée. Nous reviendrons sur ces questions dans un prochain travail.

Université Paris-Sud, Orsay, France
E-mail addresses: TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr
Nessim.Sibony@math.u-psud.fr

Références

[1] R. Bowen, Topological entropy for noncompact sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **184** (1973), 125–136.

[2] J.-Y. Briend et J. Duval, Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* **93** (2001), 145–159.

[3] L. Clozel et E. Ullmo, Correspondances modulaires et mesures invariantes, *Journal reine angew. Math.* **558** (2003), 47–83.

[4] J. P. Demailly, Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory in *Complex Analysis and Geometry* (V. Ancona and A. Silva, eds.), Plenum Press (1993), 115–193.

[5] J. Diller and C. Favre, Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces, *Amer. J. Math.* **123** (2001), 1135–1169.

[6] T. C. Dinh, Distribution des préimages et des points périodiques d'une correspondance polynomiale, *Bull. Soc. Math. France*, à paraître.

[7] T. C. Dinh et N. Sibony, Dynamique des applications d'allure polynomiale, *J. Math. Pures Appl.* **82** (2003), 367–423.

[8] ———, Dynamique des applications polynomiales semi-régulières, *Ark. Mat*. **42** (2004), 61–85.

[9] ———, Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications, *prépublication* (2003); arxiv.org/abs/math.DS/0306095.

[10] S. Friedland, Entropy of polynomial and rational maps, *Ann. of Math.* **133** (1991), 359–368.

[11] M. Gromov, On the entropy of holomorphic maps, *Enseignement Math.* **49** (2003), 217–235. (Manuscript, 1977).

[12] V. Guedj, Ergodic properties of rational mappings with large topological degree, *Ann. of Math.*, to appear, 2005.

[13] V. A. Iskovskih and Ju. I. Manin, Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem, *Math. USSR Sb*. **15** (1971), 141–166.

[14] P. Lelong, *Fonctions Plurisousharmoniques et Formes Différentielles Positives*, Dunod, Paris, 1968.

[15] M. Méo, Image inverse d'un courant positif fermé par une application surjective, *C.R.A.S.* **322** (1996), 1141–1144.

[16] S. Newhouse, Entropy and volume, *Ergodic Theory and Dynam. Systems* $\mathbf{8}^*$ (1988), *Charles Conley Memorial Issue*, 283–299.

[17] A. Russakovskii and B. Shiffman, Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics, *Indiana Univ. Math. J.* **46** (1997), 897–932.

[18] N. Sibony, Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$, in *Dynamique et Géométrie Complexes* (Lyon, 1997), *Panor. Synthèses* **8** (1999), 97–185.

[19] H. Skoda, Prolongement des courants positifs, fermés de masse finie, *Invent. Math.* **66** (1982), 361–376.

[20] C. Voisin, Intrinsic pseudovolume forms and K-correspondences, *The Fano Conference*, 761–792 , Univ. Torino, Turin, 2004.

(Received March 13, 2003)