Annals of Mathematics, **160** (2004), 1013–1055

Laminations mesurées de plissage des variétés hyperboliques de dimension 3

Par Francis Bonahon et Jean-Pierre Otal*

Résumé anglais

For a hyperbolic metric on a 3-dimensional manifold, the boundary of its convex core is a surface which is almost everywhere totally geodesic, but which is bent along a family of disjoint geodesics. The locus and intensity of this bending is described by a measured geodesic lamination, which is a topological object. We consider two problems: the topological characterization of those measured geodesic laminations which can occur as bending measured laminations of hyperbolic metrics; and the uniqueness problem which asks whether a hyperbolic metric is uniquely determined by its bending measured lamination.

Table des matières

1. Définitions et conditions nécessaires
2. Le lemme de fermeture
3. Les longueurs des laminations mesurées de plissage sont bornées
4. Convergence algébrique des métriques
5. Courbes de petites longueurs
6. Convergence des bords des cœurs convexes
7. Fin de la démonstration du lemme de fermeture
8. Démonstration des théorèmes 2 et 3
9. Démonstration du théorème 1

Soit $\overline{M}$ une variété compacte de dimension 3 à bord, dont l'intérieur M admet une métrique hyperbolique. Si au moins l'une des composantes de $\partial\overline{M}$ est de caractéristique d'Euler strictement négative, le théorème d'hyperbolisation de Thurston [Th2] et le théorème d'uniformisation double d'Ahlfors-Bers

*Ces travaux ont été subventionnés par les bourses DMS-9504282 et DMS-9803445 de la N.S.F. et par l'Unité Mixte de Recherche 5669 du C.N.R.S.

[Be] montrent que M admet beaucoup de métriques hyperboliques géométriquement finies (voir le §1 pour définitions et références).

L'un des invariants d'une métrique hyperbolique sur M est la lamination mesurée de plissage du bord de son cœur convexe C_m. Dans le cas d'une métrique géométriquement finie m, celle-ci peut être interprétée comme une lamination géodésique mesurée α_m sur le bord $\partial\overline{M}$. Certaines composantes de cette lamination mesurée de plissage sont des courbes fermées munies de la mesure transverse de Dirac de poids π, et correspondent aux pointes de rang 1 de la métrique m. Le reste de α_m décrit les lignes le long desquelles ∂C_m est pliée, et la mesure transverse mesure l'intensité de ce pliage.

L'espace $\mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ des laminations géodésiques mesurées sur $\partial\overline{M}$ dépend uniquement de la topologie de $\partial\overline{M}$. Si $\mathcal{GF}(M)$ est l'espace des métriques géométriquement finies sur M, on a ainsi une application $\mathcal{GF}(M) \to \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ qui associe sa lamination mesurée de plissage à une métrique hyperbolique géométriquement finie sur M (voir [KeS] et [Bo4] pour quelques propriétés de continuité et de différentiabilité de cette application).

Cet article est consacré à l'étude de quelques propriétés de cette application. Deux types de problèmes apparaissent. Un *problème d'existence*: quelles laminations géodésiques mesurées peuvent apparaître comme laminations mesurées de plissage d'une métrique géométriquement finie? Un *problème d'unicité*: est-ce que la lamination mesurée de plissage α_m détermine la métrique m à isotopie près? Cette dernière question est à rapprocher du problème dual de reconstruire la métrique m à partir de la métrique induite sur le bord ∂C_m. Plus généralement, on rappelle la conjecture, due à Thurston, que l'application de plissage $\mathcal{GF}(M) \to \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ est un homéomorphisme sur son image. On pourra également comparer ces problèmes à leurs analogues finis, dans le cas des polyèdres idéaux de l'espace hyperbolique, résolus dans [Ri].

Dans cet article nous obtenons une réponse complète au premier problème sous l'hypothèse que le bord de $\overline{M}$ est incompressible.

Théorème 1. *Soit $\overline{M}$ une variété compacte de dimension* 3 *dont le bord $\partial\overline{M}$ est incompressible et dont l'intérieur M admet une métrique hyperbolique, et soit $\alpha \in \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ une lamination géodésique mesurée sur son bord. Il existe sur M une métrique hyperbolique géométriquement finie non-fuchsienne m dont α est la lamination mesurée de plissage si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées*:

1. *toute feuille fermée de α a un poids inférieur ou égal à π;*
2. *si $\overline{M}$ n'est pas un fibré en intervalles sur une surface compacte sans bord, alors $i(\alpha, \partial A) > 0$ pour tout anneau ou ruban de Möbius essentiel A dans $\overline{M}$;*

2′. *si* $\overline{M}$ *est un fibré en intervalles sur une surface compacte* S *sans bord, alors* $i(\alpha, p^*(\alpha')) > 0$ *pour toute lamination géodésique mesurée non-triviale* $\alpha' \in \mathcal{ML}(S)$, *où* $p^*\colon \mathcal{ML}(S) \to \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ *est l'application de préimage induite par la restriction* $p\colon \partial\overline{M} \to S$ *de la fibration.*

Ici, la fonction $i : \mathcal{ML}(\partial\overline{M}) \times \mathcal{ML}(\partial\overline{M}) \to \mathbb{R}^+$ représente le nombre d'intersection géométrique. La condition $i(\alpha, \partial A) > 0$ veut ainsi dire que l'on ne peut déformer ∂A pour le rendre disjoint de α. De même, $i(\alpha, p^*(\alpha')) > 0$ veut dire qu'il existe au moins une feuille de $p^*(\alpha')$ qui rencontre transversalement le support de α.

Rappelons que les anneaux et rubans de Möbius essentiels de $\overline{M}$ sont classifiés par la sous-variété caractéristique de Waldhausen, Johannson [Joh] et Jaco-Shalen [JaS], laquelle est souvent facile à déterminer (et toujours déterminable algorithmiquement par la théorie des surfaces normales de Haken [Ha]). La condition 2 est donc relativement explicite. Il en est de même pour la condition 2′, qui est une propriété des surfaces.

Parmi les hypothèses du théorème 1, la condition 1 est sans doute la plus surprenante, car elle ne dépend pas continûment de α. Si $\overline{M}$ ne contient aucun anneau ou ruban de Möbius essentiel, seule cette condition 1 intervient et on déduit aisément du théorème 1 que l'ensemble des laminations mesurées de plissage de métriques géométriquement finies sur M est obtenu en retirant une famille localement finie de sous-variétés de codimension 1 de la variété linéaire par morceaux $\mathcal{ML}(\partial\overline{M})$. À cause des conditions 2 et 2′, la topologie du complémentaire de l'image dans $\mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ de l'application de plissage $\mathcal{GF}(M) \to \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ est en général beaucoup plus complexe quand $\overline{M}$ contient des anneaux ou rubans de Möbius essentiels.

L'élimination des métriques fuchsiennes dans le théorème 1 est sans conséquence. Sous les hypothèses du théorème, celles-ci n'existent que quand $\overline{M}$ est un fibré en intervalles sur une surface compacte sans bord, et leur lamination mesurée de plissage est nulle.

Si l'on enlève l'hypothèse que le bord de $\overline{M}$ est incompressible, nous avons besoin (pour des raisons techniques qui apparaîtront au cours de la démonstration) de nous restreindre aux laminations géodésiques mesurées dont toutes les feuilles sont fermées.

Théorème 2. *Soit* $\overline{M}$ *une variété compacte de dimension* 3 *dont l'intérieur* M *admet une métrique hyperbolique, et soit* $\alpha \in \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ *une lamination géodésique mesurée dont toutes les feuilles sont fermées. Il existe sur* M *une métrique hyperbolique géométriquement finie non-fuchsienne* m *dont* α *est la lamination mesurée de plissage si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées*:

1. *toute feuille de* α *a un poids inférieur ou égal à* π;

2. *$i(\alpha, \partial A) > 0$ pour tout anneau ou ruban de Möbius essentiel A dans $\overline{M}$;*

3. *$i(\alpha, \partial D) > 2\pi$ pour tout disque essentiel D dans $\overline{M}$.*

Encore une fois, la théorie des surfaces normales [Ha] rend la condition 3 relativement explicite (comparer avec le sous-lemme 11). Comme précédemment, l'élimination des métriques fuchsiennes n'est pas importante: celles-ci n'apparaîtraient que lorsque $\overline{M}$ est un fibré en intervalles sur une surface compacte Σ à bord non-vide; la lamination de plissage aurait pour support une section du fibré au-dessus de $\partial\Sigma$, chaque feuille étant munie du poids π.

Toujours sous les hypothèses du théorème 2, c'est-à-dire lorsque toutes les feuilles de la lamination de plissage sont fermées, nous obtenons aussi un résultat d'unicité.

Théorème 3. *Sous les hypothèses du théorème* 2, *s'il existe une métrique géométriquement finie non-fuchsienne m dont α est la lamination mesurée de plissage*, *alors m est unique à isotopie près.*

Remarquons que l'unicité est fausse pour les métriques fuchsiennes.

Les théorèmes 1 à 3 sont démontrés en plusieurs étapes. Il est relativement élémentaire que les conditions des théorèmes 1 et 2 sont nécessaires (voir le §1). Dans un premier temps, on démontre les théorèmes 2 et 3 en se restreignant aux laminations mesurées dont le support est une famille fixe a de courbes simples disjointes. Le cas de la mesure transverse qui donne poids π à toutes les composantes de a est fourni par le théorème de Thurston sur l'hyperbolisation des variétés de dimension 3 apprêtées, pour le résultat d'existence, et par le théorème de rigidité de Mostow pour l'unicité. En appliquant un théorème récent [HoK] de C.D. Hodgson et S.P. Kerckhoff sur les variétés hyperboliques de dimension 3 à singularités coniques, on obtient que l'ensemble des mesures transverses pour a qui peuvent être réalisées comme laminations mesurées de plissage est ouvert dans l'espaces des mesures transverses satisfaisant les conditions du théorème 2. L'étape technique majeure est de montrer que cet ensemble est également fermé. Ceci est effectué aux §§2-7, où l'on démontre un lemme de fermeture qui analyse la convergence de métriques hyperboliques quand l'on contrôle la lamination mesurée de plissage de leur cœur convexe. On conclut alors la démonstration des théorèmes 2 et 3 au §8 par un argument de revêtements. À ce point, toute la technologie nécessaire est également en place pour démontrer le théorème 1 au §9: on approche la lamination mesurée α par des laminations mesurées α_n dont le support est uniquement formé de feuilles fermées; on applique alors le théorème 2 pour montrer que chacune de ces α_n est la lamination mesurée de plissage d'une métrique hyperbolique m_n; enfin, le lemme de fermeture déjà utilisé fournit une sous-suite des m_n

qui converge vers une métrique hyperbolique géométriquement finie m dont la lamination mesurée de plissage est égale à α.

Les théorèmes 1 et 2 ont été étendus au cas général par Cyril Lecuire [Le]. Il montre qu'une lamination géodésique mesurée est la lamination de plissage d'une métrique hyperbolique géométriquement finie si et seulement si elle satisfait les conditions 1, 3 et une version renforcée de la condition 2 du théorème 2.

L'histoire de cet article est la suivante. Dans un premier temps, les théorèmes 2 et 3 ont été démontrés par le second auteur dans le manuscrit [Ot1]. Le premier auteur remarqua un peu plus tard que les techniques utilisées pouvaient être étendues pour démontrer le théorème 1. Pour éviter les duplications d'arguments, les deux auteurs décidèrent alors de joindre leurs forces dans un article unique.

Les auteurs remercient le rapporteur pour des suggestions très pertinentes qui ont amélioré la lisibilité du manuscrit. Ils sont également reconnaissants à Gero Kleineidam et Juan Souto de leur avoir indiqué une erreur dans une première rédaction de la démonstration du lemme 18. La version finale de cet article a été préparée en grande partie alors que le premier auteur visitait l'Institut des Hautes Études Scientifiques, dont l'hospitalité a été fort fructueuse.

1. Définitions et conditions nécessaires

Soit $\overline{M}$ une variété compacte de dimension 3, et soit m une métrique hyperbolique sur l'intérieur M de $\overline{M}$, c'est-à-dire une métrique riemannienne complète à courbure constante -1. Rappelons que, quand le bord de $\overline{M}$ est non-vide (ce qui est le cas qui nous intéresse ici), le théorème d'hyperbolisation de Thurston [Th2] (voir également [Ka], [Ot3]) détermine exactement quand il existe une métrique hyperbolique sur M, en fonction de la topologie de $\overline{M}$.

À la métrique hyperbolique m est associée son *cœur convexe* C_m qui est le plus petit sous-ensemble fermé m–convexe non-vide de M, du moins si l'on élimine le cas dégénéré où le groupe fondamental $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe abélien d'indice fini. Le bord ∂C_m est une surface de type topologique fini, et sa géométrie a été décrite par W.P. Thurston [Th1] (voir également [EpM], [Ro]). La surface ∂C_m est presque partout totalement géodésique. La métrique par chemin induite par m sur ∂C_m est une métrique hyperbolique d'aire finie. L'ensemble des points de ∂C_m où cette surface n'est pas totalement géodésique est une union λ_m de géodésiques simples disjointes de ∂C_m, appelée le *lieu de plissage* de ∂C_m. La surface ∂C_m est pliée le long de ce lieu de plissage, et l'intensité de ce pliage est mesurée par une mesure transverse au lieu de plissage.

Cette description du bord du cœur convexe et de sa lamination mesurée de plissage est du moins valable tant que le cœur convexe C_m est effectivement de dimension 3. Ceci est équivalent à dire que la métrique hyperbolique ne provient pas d'une surface hyperbolique ou, plus précisément, que le revêtement universel $\widetilde{M}$ ne contient pas une surface complète totalement m–géodésique Π qui est invariante par l'action de $\pi_1(M)$. Nous dirons alors que la métrique hyperbolique m est *non-fuchsienne* . (Cette terminologie est peut-être non-standard, en ce sens que de nombreux auteurs imposent aux variétés hyperboliques fuchsiennes que $\pi_1(M)$ respecte les orientations de $\widetilde{M}$ et Π).

Nous nous restreignons ici aux métriques hyperboliques m qui sont non-fuchsiennes et *géométriquement finies* , en ce sens que le cœur convexe C_m est de volume fini. Dans ce cas-là, la projection $M-C_m \to \partial C_m$ permet d'identifier ∂C_m à $\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma$, où $\partial_{\chi<0}\overline{M}$ est l'union des composantes de caractéristique d'Euler strictement négative de $\partial\overline{M}$, et où γ est une famille de courbes simples disjointes dans $\partial_{\chi<0}\overline{M}$ correspondant aux pointes de rang 1 de m; de plus, la sous-variété $\gamma \subset \partial_{\chi<0}\overline{M}$ et l'identification $\partial C_m \cong \partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma$ sont bien définies à isotopie près.

Une métrique hyperbolique géométriquement finie non-fuchsienne m sur M définit ainsi une famille γ de courbes simples disjointes dans $\partial_{\chi<0}\overline{M}$ et, par considération du lieu de plissage de $\partial C_m \cong \partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma$, une lamination géodésique λ_m dans $\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma$. Considérons la lamination géodésique $\gamma \cup \lambda_m$ dans $\partial_{\chi<0}\overline{M}$, munie de la mesure transverse qui est égale à la mesure transverse de Dirac de poids π le long de γ et à la mesure transverse de plissage le long de λ_m. La lamination transverse ainsi obtenue est la *lamination mesurée de plissage* de la métrique hyperbolique m.

Par convention, une lamination géodésique mesurée sur $\partial\overline{M}$ est une lamination géodésique mesurée sur $\partial_{\chi<0}\overline{M}$. (Rappelons qu'en général la définition de laminations géodésiques sur une surface compacte S demande que l'on puisse munir S d'une métrique de courbure strictement négative, ce qui est équivalent à dire que toutes les composantes de S sont de caractéristique d'Euler strictement négative). Ainsi, la lamination mesurée de plissage de la métrique hyperbolique m est un élément de l'espace $\mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ des laminations géodésiques mesurées sur $\partial\overline{M}$.

Remarquons que la lamination de plissage ne dépend que de la classe d'isotopie de la métrique hyperbolique m. Nous désignerons par $\mathcal{GF}(M)$ l'ensemble des classes d'isotopie de métriques hyperboliques géométriquement finies non-fuchsiennes sur M.

Définissons une *multicourbe* dans $\partial\overline{M}$ comme une lamination géodésique dans $\partial_{\chi<0}\overline{M}$ dont toutes les feuilles sont fermées. Ceci est équivalent à la donnée d'une classe d'isotopie d'une réunion de courbes simples disjointes, deux-à-deux non homotopes et essentielles dans $\partial_{\chi<0}\overline{M}$. Ici, une courbe simple γ est *essentielle* si elle représente un élément indivisible de $\pi_1\big(\partial_{\chi<0}\overline{M}\big)$, ce qui équivaut à dire que γ ne borde ni un disque ni un ruban de Möbius dans $\partial_{\chi<0}\overline{M}$. Une *multicourbe pondérée* est une lamination géodésique mesurée dont le support est une multicourbe; ceci est équivalent à la donnée d'une multicourbe γ et d'un poids réel strictement positif attaché à chaque composante de γ.

Un *disque essentiel* dans $\overline{M}$ est un disque plongé dans $\overline{M}$, avec $D\cap\partial\overline{M} = \partial D$, et qui ne peut être homotopé à un disque dans $\partial\overline{M}$ par une homotopie fixant ∂D. Remarquons que ∂D est nécessairement indivisible dans $\partial\overline{M}$ et par conséquent définit une multicourbe, ainsi qu'une multicourbe pondérée $\partial D \in \mathcal{ML}\big(\partial\overline{\mathcal{M}}\big)$ en associant poids 1 à cette courbe fermée. Rappelons que le bord $\partial\overline{M}$ est *incompressible* si $\overline{M}$ ne contient aucun disque essentiel.

De même, un *anneau ou ruban de Möbius essentiel* dans $\overline{M}$ est un anneau ou ruban de Möbius A plongé dans $\overline{M}$ avec $A \cap \partial\overline{M} = \partial A$ dont le fibré normal est trivial, qui n'est pas homotope à 0 dans $\overline{M}$ et qui ne peut être homotopé à un anneau ou ruban de Möbius dans $\partial\overline{M}$ par une homotopie fixant ∂A. Remarquons que quand $\overline{M}$ admet des disques essentiels cette condition est plus faible que la condition tout aussi classique que A est incompressible et ∂-incompressible. Pour un anneau ou ruban de Möbius essentiel A, chaque composante de ∂A est homotopiquement non triviale dans $\partial\overline{M}$ mais pas forcément indivisible; de plus, deux composantes de ∂A peuvent être homotopes dans $\partial\overline{M}$. Si l'on munit $\partial_{\chi<0}\overline{M}$ d'une métrique de courbure négative, les une ou deux géodésiques homotopes aux composantes de ∂A forment une lamination géodésique. Si l'on considère de plus les degrés de l'homotopie envoyant ∂A sur ces géodésiques, les multiplicités correspondantes définissent une lamination géodésique mesurée que l'on notera encore $\partial A \in \mathcal{ML}\big(\partial\overline{\mathcal{M}}\big)$.

PROPOSITION 4. *Soit M l'intérieur d'une variété compacte $\overline{M}$ de dimension 3 et soit $\alpha \in \mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}\big)$ la lamination mesurée de plissage d'une métrique $m \in \mathcal{GF}(M)$. Alors, $i(\partial A, \alpha) > 0$ pour tout anneau ou ruban de Möbius essentiel A dans $\overline{M}$.*

Démonstration. Quitte à passer au revêtement d'orientation, on peut supposer sans perte de généralité que $\overline{M}$ est orientable. En particulier, $\overline{M}$ ne contient pas de ruban de Möbius à fibré normal trivial.

Supposons par l'absurde qu'il existe un anneau essentiel A tel que $i(\partial A, \alpha) = 0$. Si A touche une composante torique T de $\partial\overline{M}$ on peut, en recollant deux copies de A et une copie de T, construire un nouvel anneau essentiel A' dont le bord est formé de deux copies parallèles de $\partial A - T$. On peut ainsi supposer que l'anneau A a son bord ∂A contenu dans $\partial_{\chi<0}\overline{M}$. (Le même argument montre qu'un anneau essentiel dont le bord est complètement contenu dans les composantes toriques de $\partial\overline{M}$ fournit un tore essentiel, ce qui est exclu par la métrique hyperbolique de M).

Puisque $i(\partial A, \alpha) = 0$, chaque composante de $\partial A \in \mathcal{ML}(\partial\overline{\mathcal{M}})$ est, ou bien disjointe de l'union γ des feuilles fermées de poids π de α (correspondant aux pointes de C_m), ou bien contenue dans γ.

Si ∂A est disjoint de γ, alors A correspond à un anneau A' dans $C_m \cong \overline{M} - \gamma$. Par une homotopie dans C_m gardant $\partial A'$ dans ∂C_m, on peut homotoper A' en un anneau A'' dont le bord $\partial A''$ est géodésique pour la métrique de ∂C_m. Remarquons que A'' n'est pas nécessairement plongé en ce sens que les deux composantes de $\partial A''$ peuvent être confondues; on peut toutefois s'arranger pour que l'intérieur de A'' soit plongé. Comme $i(\partial A, \alpha) = 0$, si une composante de $\partial A''$ rencontre le lieu de plissage de ∂C_m, c'est une composante du lieu de plissage; il s'ensuit que les deux composantes de $\partial A''$ sont en fait géodésiques dans M. Relevons le revêtement universel $\widetilde{A}''$ de A'' dans le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M. Le bord $\partial\widetilde{A}''$ de la bande infinie $\widetilde{A}''$ fournit deux géodésiques de $\widetilde{M}$. L'invariance par le stabilisateur $\pi_1(A)$ de $\widetilde{A}'' \subset \widetilde{M}$ dans $\pi_1(M)$ montre que ces géodésiques de $\widetilde{M} \cong \mathbb{H}^3$ restent à distance bornée l'une de l'autre, et sont donc confondues. La bande $\widetilde{A}''$ borde donc un tube infini invariant par $\pi_1(A)$ qui se projette dans C_m sur un tore solide, dont la courbe $\partial A''$ est une longitude. On en déduit que l'inclusion $A'' \to C_m$ est homotope à une application d'image contenue dans $\partial A'' \subset \partial C_m$ par une homotopie fixant le bord, ce qui contredit le fait que A est un anneau essentiel.

Si une seule des composantes de ∂A est contenue dans γ, le même argument que ci-dessus fournit un anneau $A'' \subset C_m$ qui joint une géodésique fermée de M contenue dans ∂C_m à une pointe de M. Ceci est impossible puisque le générateur de $\pi_1(A'')$ dans $\pi_1(M)$ devrait être à la fois parabolique et loxodromique.

Finalement, si les deux composantes de ∂A sont contenues dans γ, l'anneau A fournit un anneau ouvert A' proprement plongé dans C_m et joignant deux pointes de M. Relevons le revêtement universel $\widetilde{A}'$ de A' dans $\widetilde{M}$. Alors $\widetilde{A}'$ est proprement plongé dans $\widetilde{M}$ et asymptote à un unique point de la sphère à l'infini de $\widetilde{M}$, à savoir le point fixe p du groupe parabolique $\pi_1(A)$ respectant $\widetilde{A}'$. En particulier, les deux bouts de A' convergent vers la même pointe de M. En considérant la boule bordée par $\widetilde{A}' \cup \{p\}$ et sa projection dans M, on obtient ainsi une homotopie propre de A' vers la pointe de M correspondant à p. On en conclut que A est homotope à un anneau dans $\partial\overline{M}$ par une homotopie fixant ∂A, ce qui contredit le fait que A est essentiel. $\square$

Un *I–fibré* est un fibré localement trivial de fibre l'intervalle compact $I = [0, 1]$.

Proposition 5. *Soit M l'intérieur de l'espace total $\overline{M}$ d'un I-fibré sur une surface compacte sans bord S, et soit α la lamination mesurée de* *plissage d'une métrique* $m \in \mathcal{GF}(M)$*. Alors* $i(\alpha, p^*(\alpha')) > 0$ *pour toute lamination mesurée* $\alpha' \in \mathcal{ML}(\mathcal{S})$*, où* $p^*\colon \mathcal{ML}(\mathcal{S}) \to \mathcal{ML}\big(\partial\overline{\mathcal{M}}\big)$ *est l'application de préimage induite par la restriction* $p\colon \partial\overline{M} \to S$ *de la fibration.*

Démonstration. Quitte à passer à un revêtement d'indice fini, on peut supposer que S est orientable et que le fibré est trivial.

Supposons par l'absurde qu'il existe une lamination mesurée $\alpha' \in \mathcal{ML}(\mathcal{S})$ telle que $i(\alpha, p^*(\alpha')) = 0$. On peut sans perte de généralité se limiter au cas où le support λ de α' est connexe.

Si au moins l'une des composantes connexes de $S-\lambda$ n'est pas simplement connexe, la courbe simple a correspondant à l'un des bouts de $S-\lambda$ n'est pas homotope à 0, et définit donc un élément $a \in \mathcal{ML}(\mathcal{S})$. La propriété que $i(\alpha, p^*(\alpha')) = 0$ entraîne que $i(\alpha, p^*(a)) = 0$. Si l'on remarque que $p^*(a) = \partial A$, où A est l'anneau essentiel $A = a \times [0,1]$ contenu dans $\overline{M} = S \times [0,1]$, ceci fournit une contradiction avec la proposition 4.

Sinon, toutes les composantes connexes de $S-\lambda$ sont simplement connexes. Puisque $i(\alpha, p^*(\alpha')) = 0$, il s'ensuit en particulier que α n'a pas de feuille fermée, et donc que la métrique m de $\overline{M}$ n'a pas de pointes. Alors le bord ∂C_m du cœur convexe se décompose en deux copies $\partial^+ C_m$ et $\partial^- C_m$ de S. Réalisons λ par une lamination géodésique $\lambda^+ \subset \partial^+ C_m$ (pour la métrique hyperbolique de $\partial^+ C_m$) et par une lamination géodésique $\lambda^- \subset \partial^- C_m$.

Soient g une feuille de λ, et g^+ et g^- les feuilles de λ^+ et λ^- correspondantes. Puisque $i(\alpha, p^*(\alpha')) = 0$, les feuilles g^+ et g^- ne coupent pas transversalement le lieu de plissage de ∂C_m, et sont donc géodésiques pour la métrique m de M. Choisissons une homotopie entre $\partial^+ C_m$ et $\partial^- C_m$; celle-ci envoie g^+ sur une quasi-géodésique h^- de la métrique de $\partial^- C_m$. Par la propriété fondamentale des quasi-géodésiques, cette quasi-géodésique h^- est homotope à une géodésique de $\partial^- C_m$ par une homotopie bougeant les points d'une distance uniformément bornée; cette géodésique est nécessairement g^- (c'est exactement ce que veut dire le fait que λ^- est la lamination géodésique de $\partial^- C_m$ réalisant λ). On a ainsi deux géodésiques g^+ et g^- de la métrique m qui sont homotopes par une homotopie bougeant les points d'une distance bornée, ce qui entraîne que les deux géodésiques g^+ et g^- coïncident, par négativité de la courbure de m. Mais ceci n'est possible que si $\partial^+ C_m$ et $\partial^- C_m$ coïncident, c'est-à-dire que si la métrique m est fuchsienne, ce qui était exclu des hypothèses (les métriques de $\mathcal{GF}(M)$ sont non-fuchsiennes.) On a donc encore atteint une contradiction. □

Quand $\overline{M}$ est un I–fibré et quand toutes les feuilles de $\alpha \in \mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}\big)$ sont fermées, on pourrait s'inquiéter que les conditions du théorème 2 semblent plus faibles que celles du théorème 1. En fait, il n'en est rien, car le lemme ci-dessous montre que dans ce cas la condition 2' du théorème 1 est équivalente à la condition 2 du théorème 2.

Lemme 6. *Soit* $\overline{M}$ *un* I*-fibré sur la surface compacte* S *sans bord, soit* $p^*\colon \mathcal{ML}(S) \to \mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}\big)$ *l'application de préimage induite par la restriction* $p\colon \partial\overline{M} \to S$ *de la fibration, et soit* $\alpha \in \mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}\big)$ *une lamination géodésique mesurée dont toutes les feuilles sont fermées. Alors il existe une lamination géodésique mesurée non-triviale* $\alpha' \in \mathcal{ML}(S)$ *telle que* $i(\alpha, p^*(\alpha')) = 0$ *si et seulement si* $\overline{M}$ *admet un anneau ou ruban de Möbius essentiel* A *tel que* $i(\alpha, \partial A) = 0$*.*

Démonstration. Un anneau ou ruban de Möbius essentiel A dans $\overline{M}$ peut être rendu vertical par une isotopie [Wa, §3]. Il existe donc une courbe simple $\alpha' \in \mathcal{ML}(S)$ telle que $\partial A = p^*(\alpha')$. Si, de plus, $i(\alpha, \partial A) = 0$, alors $i(\alpha, p^*(\alpha')) = 0$.

Réciproquement, s'il existe $\alpha' \in \mathcal{ML}(S)$ telle que $i(\alpha, p^*(\alpha')) = 0$, au moins l'une des composantes du complémentaire de $p^*(\alpha')$ dans $\partial_{\chi<0}\overline{M}$ n'est pas simplement connexe. Il s'ensuit qu'une composante W du complémentaire de α' dans S n'est pas simplement connexe. Un bout quelconque de W fournit alors une courbe simple homotopiquement non-triviale a dans S telle que $i(\alpha, p^*(a)) = 0$. Si A est l'anneau ou ruban de Möbius essentiel formé des fibres de $\overline{M}$ situées au-dessus de a, alors $\partial A = p^*(a)$ dans $\mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}\big)$, et $i(\alpha, \partial A) = i(\alpha, p^*(a)) = 0$. □

Pour les disques essentiels, nous nous restreignons au cas où la lamination mesurée de plissage est une multicourbe, puisque c'est le seul cas dont nous aurons besoin. Toutefois, la proposition 7 ci-dessous s'étend au cas général sans difficulté majeure.

Proposition 7. *Soit* M *l'intérieur d'une variété compacte* $\overline{M}$ *de dimension* 3 *et soit* $\alpha \in \mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}\big)$ *la lamination mesurée de plissage d'une métrique* $m \in \mathcal{GF}(M)$*. Supposons de plus que* α *est une multicourbe. Alors,* $i(\partial D, \alpha) > 2\pi$ *pour tout disque essentiel* D *dans* $\overline{M}$*.*

Démonstration. Si D est un disque essentiel, la courbe simple $\partial D \subset \partial\overline{M}$ est homotope à une unique « géodésique fermée » δ de ∂C_m, où δ est autorisée à sauter d'une pointe de ∂C_m à une autre chaque fois que ∂D traverse une feuille fermée de poids π de α, et est géodésique partout ailleurs. Comme l'on a supposé que la lamination mesurée de plissage α est une multicourbe, δ est formée d'une famille finie d'arcs géodésiques de la métrique m dans M. Fixons un point $x_0 \in \delta$ et joignons chaque point $x \in \delta$ à x_0 par l'arc géodésique γ_x qui est homotope à un arc (arbitraire) joignant x à x_0 dans δ. L'adhérence de l'union des γ_x est un disque plissé Δ de bord δ, formé d'un nombre fini de triangles totalement géodésiques. En particulier, la métrique induite sur Δ est hyperbolique, avec une pointe correspondant à chaque fois que δ saute d'une pointe de ∂C_m à une autre. Si l'on applique à Δ la formule de Gauss-Bonnet et si l'on remarque qu'en chaque $x \in \delta$ l'angle externe de Δ est inférieur ou égal à l'angle diédral externe de ∂C_m, on obtient que $i(\partial D, \alpha) \geqslant 2\pi + \text{area}(\Delta)$, ce qui démontre la proposition (comparer avec [RiH, §3.1], par exemple). □

2. Le lemme de fermeture

L'étape principale de la démonstration des Théorèmes 1 et 2 est le résultat suivant.

Proposition 8 (Lemme de fermeture). *Soit M l'intérieur d'une variét é compacte $\overline{M}$ de dimension 3 et soit $\alpha \in \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ une lamination géodésique mesurée sur son bord, satisfaisant les conditions du théorème 1 ou du théorème 2. Supposons qu'il existe une suite de multicourbes pondérées $\alpha_n \in \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$, $n \in \mathbb{N}$, telles que:*

(i) *pour tout n, α_n est la lamination mesurée de plissage d'une métrique hyperbolique géométriquement finie $m_n \in \mathcal{GF}(M)$;*

(ii) *la lamination mesurée α_n converge vers α pour la topologie de $\mathcal{ML}(\partial\overline{M})$;*

(iii) *le support de α_n converge vers le support de α pour la topologie de Hausdorff;*

Alors, il existe une métrique hyperbolique $m \in \mathcal{GF}(M)$ dont la lamination mesurée de plissage est α.

Remarquons que, quand α est une multicourbe pondérée et en particulier sous les hypothèses du théorème 2, la condition (iii) entraîne que le support de α_n coïncide avec le support de α pour n suffisamment grand.

Cette condition (iii), de même que l'hypothèse que toute feuille fermée de α a poids $\leqslant \pi$, peut paraître anodine. Ces hypothèses sont en fait cruciales, puisque l'énoncé est sinon faux. En effet, à l'aide des théorèmes 1 ou 2, il est facile de construire des exemples de métriques géométriquement finies $m_n \in \mathcal{GF}(M)$ dont les laminations mesurées de plissage α_n convergent, au sens de la topologie de $\mathcal{ML}(\partial\overline{M})$, vers une lamination géodésique mesurée $\alpha \in \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ qui admet une feuille compacte γ de poids $> \pi$. Dans ce cas, α ne peut évidemment pas être la lamination mesurée de plissage d'une métrique hyperbolique géométriquement finie, par définition de la mesure de plissage. Notons que le support de α_n ne peut converger vers le support de α pour la topologie de Hausdorff, puisque toutes les feuilles fermées de α_n ont poids $\leqslant \pi$. Dans un certain nombre d'exemples de ce type, on peut montrer que les métriques m_n convergent fortement vers une métrique géométriquement finie dont la lamination mesurée de plissage est obtenue à partir de α en remplaçant le poids de γ par π. Si l'on analyse ce qui se passe géométriquement dans ces exemples, on voit que le cœur convexe C_{m_n} se pince le long d'un anneau inessentiel, et que le plissage superflu se concentre sur une « bulle » en forme de tore solide qui s'échappe à l'infini quand on passe à la limite. Ce phénomène se produit sans doute dans tous les cas.

Le lecteur pourra voir que c'est au cours de la démonstration du lemme 19 que la condition (iii) est utilisée de manière essentielle. Les autres usages de cette hypothèse sont moins importants, mais simplifient un peu la démonstration.

Nous commençons maintenant la démonstration de la proposition 8. Celle-ci va occuper les paragraphes 3 à 7, c'est-à-dire la majeure partie de l'article.

Considérons une suite de multicourbes pondérées $\alpha_n \in \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ comme dans l'énoncé de la proposition. En particulier, chaque α_n est la lamination mesurée de plissage d'une métrique géométriquement finie $m_n \in \mathcal{GF}(M)$.

Fixons d'abord quelques notations. Chaque composante de α_n est homotope, ou bien à une pointe de m_n (quand le poids de cette composante dans α_n est égal à π), ou bien à une géodésique fermée de la métrique m_n qui est contenue dans le bord du cœur convexe C_{m_n}. Soit α_n^* l'union des géodésiques fermées de m_n ainsi associées aux composantes de α_n qui ne sont pas de poids π. Puisque α_n est la lamination mesurée de plissage de C_{m_n}, le complément $\partial C_{m_n} - \alpha_n^*$ est totalement géodésique.

Soit $l_{m_n}(\alpha_n)$ la longueur de la réalisation de α_n pour la métrique m_n. Plus précisément, $l_{m_n}(\alpha_n) = \sum_c \alpha_n(c)\, l_{m_n}(c^*)$ où la somme s'effectue sur toutes les composantes c de α_n, où $\alpha_n(c)$ est le poids de c dans la multicourbe pondérée α_n, où $l_{m_n}(c^*)$ est la longueur de la composante c^* de α_n^* correspondant à c si le poids de c dans α_n est strictement inférieur à π, et où $l_{m_n}(c^*) = 0$ si ce poids est égal à π (et si c correspond donc à une pointe de m_n).

3. Les longueurs des laminations mesurées de plissage sont bornées

Le première grosse étape de la démonstration de la proposition 8 va être de montrer que la suite m_n converge algébriquement. Ceci sera établi au prochain paragraphe §4, en utilisant la machinerie maintenant classique de [Th3], [MoS], [Mor]. La propriété qui nous permettra d'appliquer cette machinerie est que la longueur $l_{m_n}(\alpha_n)$ est bornée, que nous démontrons dans ce paragraphe-ci.

Quand le bord $\partial\overline{M}$ est incompressible, le fait que $l_{m_n}(\alpha_n)$ soit bornée est un résultat de Martin Bridgeman [Br]. Nous pouvons donc nous restreindre au cas où $\partial\overline{M}$ est compressible. Nous commençons par une estimation sur la longueur des méridiens de C_{m_n}.

Rappelons qu'un *méridien* de C_{m_n} est une courbe simple sur le bord ∂C_{m_n} qui est homotope à 0 dans C_{m_n} mais pas dans ∂C_{m_n}. En particulier, un méridien correspond au bord d'un disque essentiel de $\overline{M}$.

LEMME 9. *Les longueurs dans ∂C_{m_n} des méridiens de C_{m_n} ont une borne inférieure non-nulle (indépendante de n).*

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite de méridiens c_n pour C_{m_n} dont la longueur tend vers 0. Sans perte de généralité, on peut supposer que ces méridiens sont géodésiques pour la métrique hyperbolique induite sur ∂C_{m_n} (les pointes de ∂C_{m_n} ne peuvent être homotopes à 0 dans M).

Pour la démonstration du Lemme 9, on utilisera le résultat suivant.

SOUS-LEMME 10. *Dans la surface hyperbolique S, soient g et h deux géodésiques disjointes. Soit x_0 un point de g, et soient x_t et $x_{-t} \in g$ les deux points situés à distance $t > 0$ de part et d'autre de x_0 dans g. Soient y_0, y_t, y_{-t} des points de h définis de manière similaire. Alors la distance de x_t à la paire $\{y_t, y_{-t}\}$ est au plus $e^t d(x_0, y_0)$.*

Démonstration du sous-lemme 10. Par considération du revêtement universel de S, on peut se ramener au cas où S est le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$, et où la géodésique g et le point x_0 sont fixes dans $\mathbb{H}^2$. Pour un y_0 donné, le pire cas de figure apparaît quand la géodésique h est asymptote à g. Une estimation de géométrie hyperbolique permet alors de conclure aisément. □

Il est commode de relever la situation dans le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M. Dans $\widetilde{M}$, considérons la préimage $\widetilde{C}_{m_n}$ de C_{m_n}, relevons le méridien c_n en un méridien $\widetilde{c}_n$ pour $\widetilde{C}_{m_n}$, et considérons les feuilles du lieu de plissage de $\partial\widetilde{C}_{m_n}$ qui rencontrent $\widetilde{c}_n$. Par le sous-lemme 10 et puisque la longueur de c_n tend vers 0, ces feuilles sont très proches et presque parallèles dans $\widetilde{M}$ pour n suffisamment grand. Il existe donc un plan totalement géodésique P_n qui rencontre ces feuilles en des points très proches et de manière presque orthogonale. De plus, le convexe $P_n \cap \widetilde{C}_{m_n}$ est bordé par une courbe fermée très courte $\widetilde{c}'_n$ qui est homotope à $\widetilde{c}_n$ dans $\partial\widetilde{C}_{m_n}$.

Comme P_n est presque orthogonal aux feuilles du lieu de plissage de $\partial\widetilde{C}_{m_n}$ qui rencontrent $\widetilde{k}_n$, l'angle θ'_x dont tourne $\widetilde{c}'_n$ en un coin $x \in \widetilde{c}'_n$ est très proche de l'angle diédral externe θ_x de $\partial\widetilde{C}_{m_n}$ en x; l'estimation exacte est que le rapport θ'_x/θ_x est borné entre deux constantes $1 - \delta_n$ and $1 + \delta_n$ où δ_n tend vers 0 quand n tend vers ∞. Remarquons que la somme de ces angles diédraux est égale à $i(c_n, \alpha_n)$, si l'on interprète $c_n \subset \partial C_{m_n}$ comme une courbe dans $\partial\overline{M}$. On en déduit que la somme des angles dont tourne $\widetilde{c}'_n$ est comprise entre $(1 - \delta_n)\, i(c_n, \alpha_n)$ et $(1 + \delta_n)\, i(c_n, \alpha_n)$.

Par ailleurs, dans le plan hyperbolique P_n, la courbe $\widetilde{c}'_n$ est très courte et le convexe $P_n \cap \widetilde{C}_{m_n}$ qu'elle borde a donc une petite aire. D'après la formule de Gauss-Bonnet, elle tourne donc d'une quantité très proche de 2π.

On en conclut que le nombre d'intersection $i(c_n, \alpha_n)$ tend vers 2π.

Pour terminer la démonstration du lemme 9, il suffit donc de faire en sorte que la suite de méridiens c_n soit constante, ce qui contredira la condition 3 du théorème 2. Pour ceci, observons que, quand n est assez grand, chacun des méridiens c_n est *en position tendue* par rapport à α_n^*, en ce sens qu'il n'existe aucun arc k_n dans $\partial C_{m_n} - \alpha_n^*$ qui est homotope, à extrémités fixes, à un arc $k_n' \subset c_n$ dans C_{m_n} par une homotopie contenue dans C_{m_n} mais pas par une homotopie contenue dans ∂C_{m_n}. En effet, supposons qu'il existe un tel arc k_n. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'intérieur de k_n est géodésique dans $\partial C_{m_n} - \alpha_n^*$, et donc dans M pour la métrique m_n puisque $\partial C_{m_n} - \alpha_n^*$ est totalement géodésique. Si c_n est très court, il admet dans ∂C_{m_n} un voisinage tubulaire très large par le lemme de Margoulis, et k_n est donc très long. La courbe $k_n \cup k_n'$ se relève en une courbe fermée dans le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M; le relevé de k_n fournit alors un arc géodésique très long de $\widetilde{M} \cong \mathbb{H}^3$ dont les extrémités sont très proches l'une de l'autre, ce qui est clairement une contradiction.

Par conséquent, c_n est en position tendue par rapport à α_n^* pour n assez grand.

Sous-lemme 11. *Soit α une lamination satisfaisant les hypothèses du théorème* 2. *Alors, pour toute constante $A > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isotopie de méridiens de $\overline{M}$ qui sont en position tendue par rapport au support de α et qui rencontrent ce support en au plus A points.*

Démonstration. Si $a \subset \partial\overline{M}$ est le support de α, on peut considérer la paire $(\overline{M}, a)$ comme une variété à coins au sens de [Joh]. L'existence d'une métrique hyperbolique sur M garantit que $\overline{M}$ ne contient pas de tore essentiel ou de sphère essentielle, et les conditions 2 et 3 du théorème 2 entraînent que $(\overline{M}, a)$ ne contient aucun anneau ou disque essentiel dont le bord est disjoint de a. Un méridien de $\overline{M}$ qui rencontre le support de α en au plus A points borde un disque essentiel D, lequel fournit une surface $(D, D \cap a)$ dans la variété à coins $(\overline{M}, a)$. Le méridien est en position tendue si et seulement si $(D, D \cap a)$ est ∂–incompressible dans $(\overline{M}, a)$. Le résultat est alors une conséquence immédiate d'un théorème de W. Haken [Ha], qui affirme qu'une variété à coins irréductible et ∂–irréductible ne contient qu'un nombre fini de surfaces essentielles de complexité topologique fixée, modulo isotopie et twists de Dehn le long de tores et d'anneaux essentiels dont le bord est disjoint des coins (lesquels twists de Dehn ne peuvent exister pour $(\overline{M}, a)$). $\square$

Reprenons la démonstration du lemme 9. Rappelons que l'on est donc sous les hypothèses du théorème 2, puisqu'autrement il n'y a rien à démontrer. En particulier, les α_n ont le même support que la multicourbe pondérée α pour n suffisamment grand. On a vu que $i(c_n, \alpha_n)$ tend vers 2π; les méridiens c_n coupent donc le support de α en un nombre borné de points. Par le sous-lemme 11, on peut supposer après passage à une sous-suite que les c_n sont tous homotopes à un méridien fixe c. Mais alors $i(\alpha, c) = 2\pi$ par continuité du nombre d'intersection, ce qui contredit la condition 3 du théorème 2.

Ceci termine la démonstration du lemme 9, c'est-à-dire du fait que la longueur des méridiens de C_{m_n} admet une borne inférieure non-nulle. $\square$

Rappelons que la longueur de la réalisation de α_n pour la métrique m_n est définie par la formule $l_{m_n}(\alpha_n) = \sum_c \alpha_n(c)\, l_{m_n}(c^*)$, où $\alpha_n(c)$ est le poids de la composante c dans la multicourbe pondérée α_n, où $l_{m_n}(c^*)$ est la longueur de la géodésique fermée c^* homotope à c si c ne correspond pas à une pointe de m_n, et où $l_{m_n}(c^*) = 0$ si c est homotope à une pointe.

Lemme 12. *Les longueurs $l_{m_n}(\alpha_n)$ ont une borne supérieure finie.*

Démonstration. Comme indiqué précédemment, sous l'hypothèse que le bord de $\overline{M}$ est incompressible, c'est un résultat de M. Bridgeman [Br], qui fournit également une borne explicite. Nous donnons ici une démonstration qui englobe également le cas où $\partial\overline{M}$ est compressible (sous les hypothèses du théorème 2).

Commençons par deux lemmes préliminaires. Si k est un arc transverse à une lamination géodésique mesurée α, soit $i(\alpha, k)$ la masse de la mesure déposée par α sur k. En particulier, quand α est une multicourbe pondérée, $i(\alpha, k)$ est la somme (finie) des poids de α aux points de l'intersection $\alpha \cap k$.

Sous-lemme 13. *Soit S une surface munie d'une métrique hyperbolique m d'aire finie, et soit α une lamination géodésique mesurée non-nulle de support compact sur S. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un arc m-géodésique k de longueur ε qui est transverse à α et tel que $i(\alpha, k) \geqslant c(S)\, \varepsilon l_m(\alpha)$, où la constante $c(S) = 1/\left(2\pi^2\, |\chi(S)|\right)$ ne dépend que du type topologique de S.*

Démonstration du sous-lemme 13. On utilise un argument de géométrie intégrale. Soit G_ε l'espace des arcs m–géodésiques de longueur ε. Un élément de G_ε est complètement caractérisé par son milieu et par sa direction tangente en ce milieu. Il s'ensuit que l'on a une identification naturelle entre G_ε et le fibré tangent projectif $PT(S)$, quotient du fibré tangent m–unitaire $T^1(S)$ par la relation d'équivalence qui identifie le vecteur tangent v à $-v$. La métrique m se relève en une métrique sur $T^1(S)$ et $PT(S)$, dont la forme volume associée définit une mesure appelée la mesure de Liouville L_m.

Considérons l'intégrale

$$I = \int_{G_\varepsilon} i(\alpha, k)\, dL_m(k) = \int_{G_\varepsilon} \int_k d\alpha \;\, dL_m(k)$$

prise par rapport à la mesure de Liouville sur $G_\varepsilon = PT(S)$. On peut calculer cette intégrale en renversant l'ordre d'intégration. Pour tout arc k' contenu dans le support de α, les propriétés fondamentales du courant géodésique de Liouville (voir par exemple [Bo2, §3]) entraînent que l'intégrale

$$\int_{G_\varepsilon} i\big(k, k'\big)\ dL_m(k)$$

est égale à $\varepsilon l_m(k')$, où $i(k,k')$ est le cardinal de $k \cap k'$ et où $l_m(k')$ est la longueur de k'. En décomposant le support de α en une union de tels arcs k' et en intégrant par rapport à la mesure transverse α, on en conclut que l'intégrale I est égale à $\varepsilon l_m(\alpha)$.

Puisque l'intégrale de la fonction $k \mapsto i(\alpha, k)$ est égale à $\varepsilon l_m(\alpha)$, on en déduit que la borne supérieure de $k \mapsto i(\alpha,k)$ sur G_ε est supérieure ou égale à

$$\varepsilon l_m(\alpha)\,/\mathrm{vol}(PT(S)) = \varepsilon l_m(\alpha)\,/\,(\pi\,\mathrm{aire}(S)) = \varepsilon l_m(\alpha)\,/\,\big(2\pi^2\,|\chi(S)|\big)$$

En d'autres termes, il existe un arc $k \in G_\varepsilon$ avec $i(\alpha,k) \geqslant \varepsilon l_m(\alpha)\,/\,\big(2\pi^2\,|\chi(S)|\big)$. □

Remarque. L'argument ci-dessus peut être facilement raffiné en remarquant que l'on peut se restreindre à l'$\frac{\varepsilon}{2}$–voisinage du support de α, ce qui améliore l'estimation en fournissant un arc k de longueur ε tel que $i(\alpha,k) \geqslant c'(S)\, l_m(\alpha)\,/\,|\log\varepsilon|$. Toutefois, cette meilleure estimation n'est pas nécessaire pour la suite.

Nous pouvons maintenant démontrer que les longueurs $l_{m_n}(\alpha_n)$ sont uniformément bornées. Pour cela, raisonnons par l'absurde.

Si les $l_{m_n}(\alpha_n)$ ne sont pas bornées, alors, quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $l_{m_n}(\alpha_n)$ tend vers ∞. Choisissons une suite $\varepsilon_n > 0$ qui converge vers 0 et telle que $\varepsilon_n l_{m_n}(\alpha_n)$ converge vers ∞; par exemple, on peut prendre $\varepsilon_n = l_{m_n}(\alpha_n)^{-\frac{1}{2}}$. Pour tout n, le sous-lemme 13 fournit alors un arc $k_n \subset \partial C_{m_n}$ de longueur ε_n qui est géodésique pour la métrique induite par m_n sur ∂C_{m_n} et tel que $i(\alpha_n,k_n) > c(S)\,\varepsilon_n l_{m_n}(\alpha_n)$ pour une constante $c(S)$ ne dépendant que de la topologie de ∂C_{m_n}, et donc indépendante de n.

Le point essentiel ici est que la longueur de k_n tend vers 0 alors que son nombre d'intersection $i(\alpha_n,k_n)$ tend vers ∞.

Dans le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M, considérons la préimage $\widetilde{C}_{m_n}$ de C_{m_n}, relevons k_n en un arc $\widetilde{k}_n$, et considérons les feuilles du lieu de plissage de $\partial\widetilde{C}_{m_n}$ qui rencontrent $\widetilde{k}_n$. Par le sous-lemme 10 et puisque la longueur de k_n tend vers 0, ces feuilles sont très proches et presque parallèles dans $\widetilde{M}$ pour n suffisamment grand. Il existe donc un plan totalement m_n–géodésique P_n dans $\widetilde{M}$ qui rencontre ces feuilles en des points très proches et de manière presque orthogonale.

Considérons la « projection » $\widetilde{k}'_n$ de $\widetilde{k}_n$ sur P_n parallèlement à $\partial\widetilde{C}_{m_n}$. Par définition, $\widetilde{k}'_n$ est formée de l'intersection de P_n avec les faces totalement géodésiques de $\partial\widetilde{C}_{m_n}$ qui rencontrent $\widetilde{k}_n$.

Par construction, $\widetilde{k}'_n$ est un arc géodésique par morceaux immergé dans $P_n \cap \partial\widetilde{C}_{m_n}$. Comme P_n est presque orthogonal aux feuilles du lieu de plissage de $\partial\widetilde{C}_{m_n}$ qui rencontrent $\widetilde{k}_n$, l'angle θ'_x dont tourne $\widetilde{k}'_n$ en un coin $x \in \widetilde{k}'_n$ est très proche de l'angle diédral externe θ_x de $\partial\widetilde{C}_{m_n}$ en x; plus précisément, le rapport θ'_x/θ_x est borné entre deux constantes $1-\delta_n$ and $1+\delta_n$ où δ_n tend vers 0 quand n tend vers ∞. On en déduit que la somme des angles dont tourne $\widetilde{k}'_n$ est minorée par $(1-\delta_n)\, i(k_n, \alpha_n)$, et donc converge vers ∞. Comme $P_n \cap \widetilde{C}_{m_n}$ est convexe et comme la longueur de $\widetilde{k}_n$ tend vers 0, ceci n'est possible que si $\widetilde{k}'_n$ s'enroule un grand nombre de fois autour d'une composante fermée très courte c_n de $P_n \cap \partial\widetilde{C}_{m_n}$.

La courbe c_n rencontre en exactement un point chaque feuille du lieu de plissage de $\partial\widetilde{C}_{m_n}$ qui passe par un point de k_n. Par conséquent, c_n ne peut être homotope à 0 dans $\partial\widetilde{C}_{m_n}$. Comme c_n borde le convexe $P_n \cap \partial\widetilde{C}_{m_n}$, c'est donc un méridien pour $\widetilde{C}_{m_n}$.

Puisque sa longueur est très courte, c_n est contenue dans la préimage d'un tube de Margoulis de ∂C_{m_n}. Par le lemme de Margoulis, c_n se projette homéomorphiquement sur une courbe simple sur ∂C_{m_n}, laquelle fournit un méridien pour C_{m_n} dont la longueur tend vers 0 quand n tend vers ∞. Mais ceci contredit le lemme 9.

Par conséquent, notre hypothèse que les longueurs $l_{m_n}(\alpha_n)$ sont non-bornées amène à une contradiction, ce qui termine la démonstration du lemme 12. □

4. Convergence algébrique des métriques

Nous allons maintenant montrer que les métriques convergent algébriquement, quitte à passer à une sous-suite. Rappelons d'abord ce que veut dire cet énoncé. Si l'on choisit une identification isométrique entre le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M muni de m_n et l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$, l'action de revêtement de $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}$ fournit une action isométrique de $\pi_1(M)$ sur $\mathbb{H}^3$, et donc un homomorphisme $\rho_n : \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ dans le groupe d'isométries de $\mathbb{H}^3$. Alors m_n *converge algébriquement* si on peut choisir les identifications $(\widetilde{M}, m_n) \cong \mathbb{H}^3$ de sorte que ρ_n converge vers un homomorphisme $\rho_\infty : \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$, en ce sens que $\rho_n(\gamma)$ converge vers $\rho_\infty(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$. Rappelons que, si elle existe, la représentation limite ρ_∞ est discrète et fidèle [Jor] et définit donc une variété hyperbolique $\mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$; toutefois, cette variété n'est pas forcément difféomorphe à M (voir [AnC]).

Lemme 14. *Après passage à une sous-suite, les métriques m_n convergent algébriquement.*

Démonstration. En raison des hypothèses, ceci est une conséquence du lemme 12 et de la machinerie développée par Thurston pour étudier la dégénérescence algébrique d'homomorphismes dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ ([Th3], [Th5], [MoS], [Mor]). Il faut toutefois être un peu soigneux, en raison des subtilités possibles de la dégénérescence à l'intérieur de la sous-variété caractéristique de $\overline{M}$.

La situation est la plus simple lorsque α est une multicourbe (et donc pour le théorème 2), car nous sommes alors exactement sous les hypothèses du critère de convergence algébrique de Thurston [Th5], [MoS] pour une suite de représentations dans $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$. Soit a le support de α. Les hypothèses du théorème 1 ou 2 entraînent que la paire $(\overline{M}, a)$ est ∂–irréductible et anannulaire. Puisque le support des multicourbes α_n converge vers celui de α pour la topologie de Hausdorff, il est égal à celui de α pour n assez grand. Comme les longueurs $l_{m_n}(\alpha_n)$ sont bornées, $l_{m_n}(\alpha)$ est bornée. Le critère de convergence de [Th5], [MoS] montre alors que la suite m_n converge algébriquement après passage à une sous-suite.

Ayant terminé le cas du théorème 2, nous pouvons désormais supposer que nous sommes sous les hypothèses du théorème 1. Puisque $\partial\overline{M}$ est maintenant incompressible, nous allons utiliser la théorie de Morgan-Shalen [MoS]. Supposons, en raisonnant par l'absurde, que la suite ρ_n n'est pas bornée dans l'espace des représentations. Quitte à extraire une sous-suite, elle converge alors vers une action de $\pi_1(M)$ sur un arbre réel $\mathcal{T}$ qui est non-triviale, minimale, et à petits stabilisateurs d'arêtes [MoS].

Si, pour chaque composante S_i de $\partial_{\chi<0}\overline{M}$ la restriction de cette action à $\pi_1(S_i)$ avait un point fixe global dans $\mathcal{T}$, alors celle de $\pi_1(M)$ aurait aussi un point fixe global [MoS], contredisant que cette action est non-triviale et minimale. Nous pouvons supposer que l'action d'un sous-groupe $\pi_1(S_i)$ du bord est non-triviale. Par [Sk] (voir également [Ot2]) il existe alors une lamination mesurée $\beta \in \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ non-triviale telle que, pour chaque composante S_i de $\partial_{\chi<0}\overline{M}$, l'action de $\pi_1(S_i)$ sur son arbre invariant minimal $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}$ est duale à la lamination mesurée $\beta \cap S_i$.

Une conséquence du lemme 12 est que $i(\alpha, \beta) = 0$. Supposons en effet que $i(\alpha', \beta) \neq 0$ pour une composante connexe α' de la lamination α. Le théorème IV.1 de [Ot2] dit alors que, pour toute multicourbe α'' suffisamment voisine de α' pour la topologie de Hausdorff, la longueur $l_n(\alpha'')$ tend vers l'infini de manière uniforme en n. Puisque, par l'hypothèse (iii) du lemme de fermeture, la réunion de certaines composantes connexes de la multicourbe α_n est proche de α' pour la topologie de Hausdorff, ceci contredit le lemme 12.

Soit W la sous-variété caractéristique de $\overline{M}$, au sens de [Joh], [JaS]. Rappelons que chaque composante W_1 de W est, ou bien une variété de Seifert telle que $W_1 \cap \partial\overline{M}$ soit une union de fibres, ou bien un I–fibré sur une surface à bord de caractéristique d'Euler strictement négative tel que $W_1 \cap \partial\overline{M}$ soit le ∂I–fibré correspondant. Puisque l'intérieur M de $\overline{M}$ admet une métrique hyperbolique, $\overline{M}$ ne contient pas de tore ou bouteille de Klein essentiel, et chaque composante Seifert de W est donc nécessairement un tore solide, une bouteille de Klein solide ou le produit du tore ou de la bouteille de Klein avec un intervalle.

Il est démontré dans [Th5], [Mor] que β peut être isotopée à l'intérieur de $W \cap \partial\overline{M}$.

Considérons d'abord le cas où une composante de β est contenue dans une composante I–fibrée W_1 de W, mais ne peut être déformée dans le bord $\partial\big(W_1 \cap \partial\overline{M}\big)$. Soit β_1 l'union des composantes de β de ce type, à savoir qui sont contenues dans W_1 mais ne peuvent être déformées dans $\partial\big(W_1 \cap \partial\overline{M}\big)$; soit $P\colon W_1 \to F_1$ la I–fibration de W_1. Par définition de β, pour chaque composante S de $W_1 \cap \partial\overline{M}$, $S \cap \beta_1$ est la lamination mesurée duale à l'action de $\pi_1(F)$ sur son arbre invariant minimal dans $\mathcal{T}$. Comme cette action se factorise par l'action de $\pi_1(W_1) = \pi_1(F_1)$, il s'ensuit qu'il existe une lamination géodésique mesurée $\beta_1' \in \mathcal{ML}(F_1)$ telle que $p^*(\beta_1') = \beta_1 \in \mathcal{ML}\big(W_1 \cap \partial\overline{M}\big) \subset \mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}\big)$. Si $W_1 = \overline{M}$, de sorte que $\overline{M}$ est un I–fibré, ceci contredit la condition 2 du théorème 1 puisque $i(\alpha, \beta_1) = 0$. Par conséquent, $W_1 \neq \overline{M}$ et le bord de F_1 est non-vide. Alors, au moins l'une des composantes de $F - \beta_1'$ n'est pas contractile. Si l'on prend une courbe simple c dans F_1 qui est homotope à l'un des bouts de cette composante, alors c n'est pas homotope à 0, et $i(\alpha, p^*(c)) = 0$ puisque $i(\alpha, \beta_1) = 0$. Mais alors l'anneau ou ruban de Möbius $A = p^{-1}(c)$ contredit la condition 2 du théorème 1. Par conséquent, β ne peut avoir de composante du type considéré.

Considérons maintenant une composante β_1 de β qui est contenue dans une composante I–fibrée W_1 de W, et où β_1 ne peut être déformée dans une composante Seifert de W. Nous venons de voir que β_1 peut être déformée de sorte qu'elle soit contenue dans un anneau ou ruban de Möbius A composante de la frontière $\overline{\partial W_1 - \partial\overline{M}}$ de W_1 dans $\overline{M}$. Si A est un ruban de Möbius, alors $i(\alpha, \partial A) = i(\alpha, \beta_1) = 0$ et A contredit donc les conditions 2 et $2'$ du théorème 1. Nous pouvons donc supposer que A est un anneau. Nous allons montrer que l'autre composante $\beta_0 = \partial A - \beta_1$ de ∂A est isotope à une composante de β. Soit V_1 la composante de l'adhérence de $\overline{M} - W$ qui touche A. Par [MoS], [Th3], le sous-groupe $\pi_1(V_1)$ de $\pi_1(M)$ fixe un point de l'arbre $\mathcal{T}$, et ce point fixe est unique parce que l'action de $\pi_1(M)$ sur $\mathcal{T}$ est à petits stabilisateurs d'arêtes. (Par définition de la variété caractéristique W, le seul cas où le groupe fondamental d'une composante V de $\overline{M} - W$ a un sous-groupe abélien d'indice fini est celui où V est un anneau épaissi ou ruban de Möbius épaissi qui sépare une composante I–fibrée d'une composante Seifert de W, ce qui est exclu ici par notre hypothèse que β_1 ne peut être déformée dans une composante Seifert de W.) De même, par le paragraphe précédent, $\pi_1(W_1)$ fixe un unique point de $\mathcal{T}$. Remarquons que les points fixes de $\pi_1(V_1)$ et $\pi_1(W_1)$ sont distincts puisque β_1 est contenue dans la lamination mesurée β, qui est duale à l'action du groupe fondamental de chaque composante de $\partial\overline{M}$ sur son arbre minimal invariant dans $\mathcal{T}$. Il s'ensuit que les groupes fondamentaux des composantes de $V_1 \cap \partial\overline{M}$ et $W_1 \cap \partial\overline{M}$ qui touchent $\beta_0 = \partial A - \beta_1$ fixent des points (uniques) distincts de $\mathcal{T}$. On en conclut que β_0 est nécessairement isotope à une autre composante de β, et en particulier que $i(\alpha, \beta_0) = 0$. Mais l'anneau essentiel A contredit alors la condition 2 du théorème 1 (remarquons que $\overline{M}$ n'est pas un I–fibré puisque $W_1 \neq \overline{M}$), ce qui montre que β ne peut non plus avoir de composante β_1 de ce type.

Par conséquent, chaque composante β_1 de β peut être déformée dans une composante Seifert W_1 de W.

Considérons d'abord le cas où W_1 est orientable. Alors la fibration de Seifert de W_1 a pour base un disque et n'admet aucune fibre exceptionnelle: En effet, la préimage d'un arc convenablement choisi dans la base fournirait sinon un anneau essentiel contenu dans W_1 et dont le bord est formé de deux copies parallèles de la courbe fermée β_1, ce qui contredirait la condition 2 du théorème 1 puisque $i(\alpha, \beta) = 0$. En particulier, la frontière $\overline{\partial W_1 - \partial\overline{M}}$ de W_1 dans $\overline{M}$ est formée de $k \geqslant 2$ anneaux $A_1, \ldots, A_k$. On peut choisir la numérotation de sorte que les A_i apparaissent dans cet ordre dans le bord de W_1, et de sorte que β_1 soit située dans la composante de $W_1 \cap \partial\overline{M}$ qui sépare A_k de A_1. Soit $G_i \subset \pi_1(M)$ le groupe fondamental de la composante V_i de l'adhérence de $\overline{M} - W_1$ qui touche A_i si V_i n'est pas un anneau épaissi, et soit G_i le groupe fondamental de l'autre composante (I–fibrée) de W qui touche V_i dans le cas contraire. Comme précédemment, chaque G_i a un point fixe x_i dans $\mathcal{T}$, unique puisque G_i n'a pas de sous-groupe abélien d'indice fini. Puisque β_1 est une composante de β, les deux points x_k et x_1 sont distincts. Il existe donc un $i \leqslant k-1$ avec $x_i \neq x_{i+1}$. Alors la composante de $W_1 \cap \partial\overline{M}$ séparant A_i de A_{i+1} contienne une autre composante β_0 de β. Mais $\beta_1 \cup \beta_0$ est dans ce cas le bord d'un anneau essentiel A tel que $i(\alpha, \partial A) = 0$, ce qui contredit de nouveau la condition 2 du théorème 1.

Finalement, considérons le cas où la composante Seifert W_1 n'est pas orientable. Soit W_1' la préimage de W_1 dans le revêtement d'orientation $\overline{M}'$ de $\overline{M}$, et soit $\beta' \in \mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}'\big)$ la préimage de $\beta \in \mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}\big)$. Remarquons que, pour chaque composante S' de $\partial_{\chi<0}\overline{M}'$ se projetant sur $S \subset \partial_{\chi<0}\overline{M}$, le sous-arbre minimal de $\mathcal{T}$ invariant par $\pi_1(S')$ est égal au sous-arbre minimal invariant par $\pi_1(S)$, puisque celui-ci est l'union des axes des éléments de $\pi_1(S)$. Il s'ensuit que $\beta' \cap S'$ est duale à l'action de $\pi_1(S')$ sur son arbre invariant minimal dans $\mathcal{T}$. L'argument du paragraphe précédent fournit alors un anneau essentiel A' de $\overline{M}'$, contenu dans W_1', et dont le bord est formé de deux composantes de β'. La projection de l'anneau A' dans $\overline{M}$ se désingularise alors en un anneau ou ruban de Möbius essentiel A dont le bord est contenu dans β. Mais ceci contredit de nouveau la condition 2 du théorème 1 puisque $i(\alpha, \beta) = 0$.

Cette contradiction finale termine la démonstration que la suite ρ_n doit rester bornée dans l'espace des représentations. $\square$

On supposera désormais que les identifications isométriques entre $\widetilde{M}$ munie de m_n (resp. m_∞) et $\mathbb{H}^3$ sont choisies de sorte que $\rho_n(\gamma)$ converge vers $\rho_\infty(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$. On notera M_n la variété M munie de la métrique m_n, c'est-à-dire $\mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$. La représentation ρ_∞ est une limite de représentations discrètes et fidèles, et est donc discrète et fidèle [Jor]. Elle définit donc une variété hyperbolique $M_\infty = \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$.

À ce point-ci, nous savons uniquement que la variété M_∞ a le même type d'homotopie que M. Il nous reste à montrer que M_∞ est difféomorphe à M (et en particulier qu'un saut de topologie du type de celui exhibé dans [AnC] ne peut se produire), que M_∞ est géométriquement finie, et que sa lamination mesurée de plissage est égale à α. Pour ceci, il va nous falloir contrôler le bord des cœurs convexes C_{m_n}. Ceci sera fait au §6, à l'aide de techniques de surfaces plissées. Plus précisément, nous montrerons que les surfaces ∂C_{m_n} convergent vers une surface plissée localement convexe dans M_∞. Au §7, nous montrerons par un argument homologique que cette surface plissée limite est le bord du cœur convexe de M_∞. Le théorème de Waldhausen [Wa] permet alors de conclure que M_∞ est difféomorphe à M. Par convergence de ∂C_{m_n} vers le bord du cœur convexe de M_∞, il s'ensuit aisément que la lamination mesurée de plissage de M_∞ est la limite des laminations mesurées de plissage α_n de M_n, c'est-à-dire α. Ceci terminera la démonstration du lemme de fermeture.

Comme d'habitude dans les arguments de surfaces plissées, les courbes de ∂C_{m_n} dont la longueur tend vers 0 vont poser quelques problèmes techniques, et nous allons d'abord mettre un peu d'ordre parmi celles-ci au paragraphe suivant.

5. Courbes de petites longueurs

Rappelons que l'on a une identification naturelle, bien définie à isotopie près, entre ∂C_{m_n} et le complémentaire des feuilles fermées de poids π de α_n dans $\partial_{\chi<0}\overline{M}$.

LEMME 15. *Quitte à passer à une sous-suite, il existe une multicourbe γ dans $\partial_{\chi<0}\overline{M}$ avec les deux propriétés suivantes*:

(1) *Chaque composante c de γ a un multiple non-trivial qui est homotope dans $\partial\overline{M}$ à une courbe simple c_n contenue dans ∂C_{m_n} et dont la longueur dans ∂C_{m_n} tend vers 0 quand n tend vers ∞.*

(2) *Pour toute courbe simple c qui est homotope dans $\partial\overline{M}$ à une courbe simple c_n de ∂C_{m_n} et qui n'est pas homotope à un multiple d'une composante de γ, les longueurs des c_n dans ∂C_{m_n} sont bornées inférieurement par une constante strictement positive* (*dépendant de c*).

Puisque l'on se restreint ici aux courbes simples, il n'est nécessaire de considérer des multiples (d'ordre 2) que pour les courbes qui renversent l'orientation de $\partial\overline{M}$. Rappelons que les composantes d'une multicourbe sont par définition essentielles, et donc indivisibles.

Démonstration. Si, pour toute courbe simple essentielle c dans $\partial\overline{M}$ qui est homotope dans $\partial\overline{M}$ à une courbe simple c_n dans ∂C_{m_n}, la longueur des c_n dans ∂C_{m_n} est bornée inférieurement par une constante strictement positive indépendante de n, on peut prendre $\gamma = \emptyset$. Sinon, quitte à passer à une sous-suite, il existe une courbe simple essentielle $c^{(1)}$ dans $\partial\overline{M}$ dont un multiple est homotope à une courbe simple $c_n^{(1)}$ dans ∂C_{m_n} dont la longueur tend vers 0 quand n tend vers ∞.

Si $\gamma = c^{(1)}$ satisfait la condition 2 du lemme, on s'arrête. Sinon, quitte à passer à une sous-suite, il existe une courbe simple essentielle $c^{(2)}$ dans $\partial\overline{M}$, non-homotope à $c^{(1)}$, dont un multiple est homotope à une courbe simple $c_n^{(2)}$ dans ∂C_{m_n} dont la longueur tend vers 0. Le lemme de Margoulis entraîne que $c_n^{(1)}$ et $c_n^{(2)}$ sont homotopes à des courbes disjointes dans ∂C_{m_n}. En particulier, on peut choisir $c^{(2)}$ disjointe de $c^{(1)}$ dans $\partial\overline{M}$.

Si $\gamma = c^{(1)} \cup c^{(2)}$ satisfait la condition 2 du lemme, on s'arrête. Sinon, on continue de la même façon, passant à une sous-suite à chaque étape, jusqu'à ce que l'on atteigne une famille $\gamma = c^{(1)} \cup c^{(2)} \cup \ldots \cup c^{(p)}$ de courbes simples essentielles disjointes qui satisfont les deux conditions du lemme. Remarquons que le processus doit nécessairement s'arrêter puisque l'on peut avoir au plus $\left|\chi\left(\partial\overline{M}\right)\right|$ courbes simples disjointes essentielles deux-à-deux non homotopes dans $\partial\overline{M}$. $\square$

Puisque α_n converge vers α dans $\mathcal{ML}\left(\partial\overline{M}\right)$, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour les feuilles fermées de poids π de α_n. Quitte à passer à une sous-suite, on peut donc supposer que l'union γ^{P} des feuilles fermées de poids π de α_n (correspondant aux pointes de ∂C_{m_n}) est indépendante de n. Remarquons que γ^{P} est contenue dans γ. Intuitivement, la multicourbe γ correspond aux pointes de ∂C_{m_n} qui existent déjà et à celles qui apparaissent quand on passe à la limite. Nous verrons plus tard, au lemme 19, que γ est exactement l'union des feuilles fermées de poids π de α.

LEMME 16. *Pour n assez grand, chaque composante de γ est, ou bien contenue dans le support de α_n, ou bien disjointe de celui-ci.*

Démonstration. Montrons d'abord que chaque composante c de γ est, ou bien contenue dans le support de α, ou bien disjointe de celui-ci. Sinon, le nombre d'intersection $i(c, \alpha)$ est non-nul, et $i(c, \alpha_n)$ est donc minoré par une constante strictement positive, pour n assez grand. En particulier, c n'est pas l'une des composantes de γ correspondant aux pointes de ∂C_{m_n}, et est donc homotope à une géodésique fermée c_n de ∂C_{m_n}. Par définition de γ, la géodésique c_n est très courte et, comme $i(c, \alpha_n)$ est minoré par une constante strictement positive, il s'ensuit que la longueur $l_{m_n}(\alpha_n)$ est très grande. Mais ceci contredit le lemme 12.

Donc, chaque composante de γ est, ou bien contenue dans le support de α, ou bien disjointe de celui-ci. Comme, par hypothèse, le support de α_n converge vers le support de α pour la topologie de Hausdorff, la même propriété est vérifiée par α_n pour n assez grand. $\square$

6. Convergence des bords des cœurs convexes

Rappelons que nous nous sommes arrangés, au §5, pour que les α_n aient les mêmes feuilles de poids π, qui forment une multicourbe γ^{P} contenue dans la multicourbe γ définie au §5. Soit γ_n la famille de géodésiques fermées de ∂C_{m_n} homotopes aux composantes de $\gamma - \gamma^{\mathrm{P}}$. À cause du lemme 16, les composantes de γ_n sont disjointes du lieu de plissage de ∂C_{m_n} ou contenues dans celui-ci, et sont par conséquent aussi géodésiques pour la métrique m_n dans M.

À chaque composante S de $\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma$ est associée de manière naturelle une composante S_n de $\partial C_{m_n} - \gamma_n$. Le prochain lemme garantit que la surface S_n ne peut complètement s'échapper à l'infini, en un sens que nous allons préciser.

Choisissons un point base $O \in \mathbb{H}^3$, et soit x_n son image dans $\mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$. Comme les métriques m_n ne sont définies qu'à isotopie près, le comportement des x_n dans la variété fixe M peut être particulièrement erratique, et il vaut mieux penser à x_n comme un point base dans la variété abstraite $M_n = \mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$. On peut toujours s'arranger pour que x_n soit dans le cœur convexe C_{m_n}, par exemple en faisant en sorte que O soit sur l'axe d'un élément loxodromique de $\rho_n(\pi_1(M))$.

Dans le revêtement universel de $\overline{M}$, choisissons maintenant une composante $\widetilde{S}$ de la préimage de S. Ceci est équivalent à choisir l'image de $\pi_1(S)$ par l'un des homomorphismes $\pi_1(S) \to \pi_1(\overline{M})$ induits par l'application d'inclusion $S \to \overline{M}$. Ceci est aussi équivalent au choix d'un arc k allant dans $\overline{M}$ du point base utilisé pour définir le groupe fondamental $\pi_1(\overline{M})$ au point base dans S utilisé pour définir $\pi_1(S)$, l'arc k étant considéré modulo homotopie fixant ses extrémités et modulo composition avec des lacets de S. Un tel choix spécifie alors un arc k_n dans M_n allant du point base x_n à un point $y_n \in S_n$, qui est bien défini à homotopie près parmi les arcs joignant x_n à S_n.

LEMME 17. *L'arc k_n, joignant S_n au point base x_n, peut être choisi de longueur uniformément bornée.*

Démonstration. Une conséquence du lemme 16 est que, ou bien S_n est totalement géodésique, ou bien son intérieur contient une feuille du support de α_n. Dans les deux cas, on en déduit que S_n contient une géodésique infinie de la métrique m_n de M. En particulier, l'image de $\pi_1(S)$ dans $\pi_1(M)$ ne peut être cyclique. Comme ρ_∞ est discrète, il existe donc une courbe fermée essentielle c dans S, pas forcément simple, telle que $\rho_\infty(c)$ soit loxodromique. Puisque $\rho_\infty(c)$ est loxodromique, $\rho_n(c)$ est loxodromique pour n assez grand, et on peut donc considérer la m_n–géodésique fermée c_n^* de M qui est homotope à c. En particulier, c ne peut être homotope à une pointe de ∂C_{m_n}, et on peut considérer la géodésique c_n de ∂C_{m_n} qui est homotope à c dans ∂C_{m_n}.

Nous allons majorer la distance de c_n à c_n^* par un argument classique de surfaces simpliciales hyperboliques (comparer avec [Th4] ou [Bo1]).

Soit $A\colon S^1 \times [0,1] \to M$ une homotopie entre c_n et c_n^*, envoyant $S^1 \times \{0\}$ sur c_n et $S^1 \times \{1\}$ sur c_n^*. Par construction, la courbe c_n est m_n–géodésique par morceaux dans M, et on peut donc choisir p points successifs $x_1, \dots, x_p$ dans $S^1 \times \{0\}$ de sorte que A soit m_n–géodésique sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}] \subset S^1 \times \{0\}$ (en comptant les indices modulo p). Choisissons p points successifs $y_1, \dots, y_p$ dans $S^1 \times \{1\}$, et triangulons $S^1 \times [0,1]$ « en tambour » en rajoutant des arêtes joignant chaque x_i à y_i et à y_{i+1}. Remarquons également que l'application A est géodésique sur $S^1 \times \{1\}$, puisque c_n^* est m_n–géodésique. Par une homotopie de A, on peut alors faire en sorte que A soit m_n–géodésique sur chaque arête, et totalement géodésique sur chaque face de la triangulation de $S^1 \times [0,1]$.

Considérons la métrique induite par A et m_n sur $S^1 \times [0,1]$. Puisque A est géodésique sur les arêtes et totalement géodésique sur les faces de la triangulation, cette métrique est hyperbolique. De plus, le bord est géodésique par morceaux, et les coins peuvent uniquement apparaître aux sommets x_i et y_i.

Comme d'habitude, la remarque cruciale est que l'angle interne de $S^1 \times [0,1]$ en x_i est supérieur ou égal à l'angle formé par c_n en $A(x_i)$ dans M, qui est lui-même supérieur ou égal à l'angle diédral interne de ∂C_{m_n} en $A(x_i)$. On en déduit que l'angle externe de $S^1 \times [0,1]$ en x_i est inférieur ou égal à l'angle diédral externe de ∂C_{m_n} en $A(x_i)$. Par conséquent, la somme des angles externes de $S^1 \times [0,1]$ le long de $S^1 \times \{0\}$ est majorée par le nombre d'intersection $i(c, \alpha_n)$.

De même, puisque c_n^* est m_n–géodésique, l'angle interne de $S^1 \times [0,1]$ en y_i est supérieur ou égal à π. Tous les angles externes de $S^1 \times [0,1]$ le long de $S^1 \times \{1\}$ sont donc négatifs ou nuls. Par application de la formule de Gauss-Bonnet, on en conclut que l'aire de $S^1 \times [0,1]$ est majorée par $i(c, \alpha_n)$.

Soit d_n la distance de $S^1 \times \{0\}$ à $S^1 \times \{1\}$ dans $S^1 \times [0,1]$, et soit U_n l'ensemble des points à distance au plus d_n de $S^1 \times \{1\}$. Cet U_n est l'union des arcs géodésiques de longueur d_n issus de chaque point $x \in S^1 \times \{1\}$ et formant avec $S^1 \times \{1\}$ un angle supérieur ou égal à $\pi/2$ de chaque côté de x. En utilisant la formule de Gauss-Bonnet, le fait que la métrique de $S^1 \times [0,1]$ est hyperbolique et concave le long de $S^1 \times \{1\}$ entraîne que ces arcs géodésiques sont plongés et d'intérieurs disjoints. Par une estimation de géométrie hyperbolique, l'aire de U_n est donc bornée inférieurement par $\operatorname{sh} d_n$ fois la longueur de $S^1 \times \{1\}$. Comme $S^1 \times \{1\}$ est de longueur $l_{m_n}(c_n^*)$, il s'ensuit que l'aire de U_n est minorée par $l_{m_n}(c_n^*)\, d_n$. L'aire de U_n étant majorée par l'aire de l'anneau $S^1 \times [0,1]$, on en conclut que

$$d_n \leqslant i(c, \alpha_n) \,/ l_{m_n}(c_n^*) \,.$$

Quand n tend vers ∞, $i(c,\alpha_n)$ converge vers $i(c,\alpha)$. En particulier, $i(c,\alpha_n)$ reste uniformément borné. D'un autre côté, la longueur $l_{m_n}(c_n^*)$ est égale à la distance de translation de $\rho_n(c) \in \operatorname{Isom}(\mathbb{H}^3)$, et converge donc vers la distance de translation de $\rho_\infty(c)$. Puisque l'on a choisi c de sorte qu'il est loxodromique pour ρ_∞, cette dernière distance de translation est non-nulle, et $l_{m_n}(c_n^*)$ est donc minorée par une constante strictement positive. Par conséquent, la distance d_n est uniformément bornée.

Il existe donc un arc k'_n de longueur au plus d_n allant de c_n à c_n^*. De plus, cet arc suit l'homotopie A de c_n à c_n^* en ce sens que l'on peut choisir cette homotopie de sorte que k'_n soit la trace $A(\{x\} \times [0,1])$ d'un point $x \in S^1$. Par ailleurs, choisissons dans S un arc connectant la courbe c au point base de S. Ceci définit un élément $c \in \pi_1(S)$, et donc un élément $c \in \pi_1(M)$ en utilisant l'arc k connectant le point base de S à celui de M_n. Le choix de cette classe $c \in \pi_1(M)$ définit pour tout n un arc k''_n allant du point base x_n à c_n^*, bien défini modulo homotopie d'arcs allant de x_n à c_n^*. Comme $\rho_n(c)$ converge vers l'élément loxodromique $\rho_\infty(c)$, on peut choisir cet arc k''_n de sorte que sa longueur reste bornée. De plus, par construction, k_n est homotope, à travers une famille d'arcs allant de x_n à S_n, à l'union de k''_n, d'un arc contenu dans c_n^* et de k'_n. En d'autres termes, on peut choisir k_n comme l'union des ces trois arcs. Puisque les longueurs de k'_n, k''_n et c_n^* sont bornées, on en déduit que l'on peut choisir k_n de sorte que sa longueur reste bornée. $\square$

L'homotopie naturelle entre S et S_n dans $\overline{M}$ fournit une application $f_n \colon S \to S_n \subset M_n$, bien définie modulo précomposition par une isotopie de S, que l'on peut interpréter comme une *surface plissée* [Th1], [CEG]. Ceci signifie que la métrique par chemin μ_n sur S pour laquelle f_n est une isométrie est hyperbolique, et que f_n est totalement géodésique sur le complémentaire d'une lamination μ_n–géodésique (ici le support de α_n). Remarquons que le complété de S pour la métrique μ_n est une surface hyperbolique d'aire finie et dont le bord est une union de géodésiques fermées.

En général, le plissage d'une surface plissée est déterminé par une lamination géodésique munie d'une cocycle transverse [Bo3]. Rappelons qu'une surface plissée est *localement convexe* quand cette donnée de plissage est en fait une lamination géodésique mesurée. Ceci équivaut à dire que la surface plissée délimite localement un sous-ensemble convexe de la variété ambiante.

Par exemple, les surfaces plissées f_n sont ici localement convexes, de laminations mesurées de plissage $S \cap \alpha_n$.

Nous allons montrer que, quitte à passer à une sous-suite, la suite de surfaces plissées $f_n : S \to M_n = \mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$ converge vers une surface plissée $f_\infty : S \to M_\infty$ dans la variété hyperbolique $M_\infty = \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$, dans un sens que nous allons maintenant préciser. Si l'on fixe une composante $\widetilde{S}$ de la préimage de S dans le revêtement universel de $\overline{M}$, l'homotopie entre S et S_n spécifie un relevé $\widetilde{f}_n \colon \widetilde{S} \to \mathbb{H}^3$ de f_n. Alors $f_n \colon S \to M_n$ *converge* vers la surface plissée $f_\infty \colon S \to M_\infty$ si, quitte à précomposer f_n par une isotopie de S, la suite $\widetilde{f}_n \colon \widetilde{S} \to \mathbb{H}^3$ converge uniformément sur tout compact de $\widetilde{S}$ vers une surface plissée $\widetilde{f}_\infty : \widetilde{S} \to \mathbb{H}^3$ qui relève $f_\infty : S \to M_\infty$. Par convergence algébrique de ρ_n vers ρ_∞, ceci est indépendant du choix de $\widetilde{S}$.

LEMME 18. *Quitte à passer à une sous-suite, la suite de surfaces plissées $f_n : S \to M_n$ converge vers une surface plissée $f_\infty : S \to M_\infty$ localement convexe, dont la lamination mesurée de plissage est $\alpha \cap S$.*

Démonstration. Si $\alpha \cap S$ est vide, ceci découle immédiatement du fait que le groupe fuchsien $\rho_n(\pi_1(S))$ converge vers $\rho_\infty(\pi_1(S))$. Nous pouvons donc supposer que $\alpha \cap S$ n'est pas vide.

Nous allons distinguer deux cas, selon que la lamination $\alpha \cap S$ est réalisable dans $M_\infty = \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ ou non. Rappelons que ceci veut dire qu'il existe une surface plissée $f \colon S \to M_\infty$ qui est homotope à l'application d'inclusion $S \to \overline{M}$ et qui envoie chaque feuille de $\alpha \cap S$ sur une géodésique de M_∞.

Remarquons d'abord que, quand toutes les feuilles de $\alpha \cap S$ sont fermées, et en particulier sous les hypothèses du théorème 2, la lamination $\alpha \cap S$ est nécessairement réalisable. En effet, par l'hypothèse de convergence Hausdorff de la condition (iii) de la proposition 8, toute feuille a de $\alpha \cap S$ est aussi une feuille de $\alpha_n \cap S$ pour n assez grand. En particulier, a est homotope à une géodésique fermée a_n de M_n qui est contenue dans le bord ∂C_{m_n}. Par définition de γ, la longueur de a_n admet une borne inférieure strictement positive, et il s'ensuit que $\rho_\infty(a)$ est loxodromique. En particulier, a est homotope à une géodésique fermée a_∞ de M_∞. De plus, si S' est une composante de $S - \alpha$, la surface totalement géodésique $f_n(S') \subset M_n$ converge vers une surface totalement géodésique $f_\infty(S') \subset M_\infty$ par convergence algébrique de ρ_n vers ρ_∞ sur le sous-groupe $\pi_1(S') \subset \pi_1(M)$. L'union des géodésiques fermées a_∞ et surfaces totalement géodésiques $f_\infty(S')$ ainsi associées aux composantes de $\alpha \cap S$ et de $S - \alpha$ fournit une surface plissée $f_\infty \colon S \to M_\infty$ qui réalise $\alpha \cap S$.

Considérons d'abord le cas où $\alpha \cap S$ est non-vide et réalisable dans M_∞. Par la remarque ci-dessus, ceci englobe en particulier le cas où toutes les feuilles de $\alpha \cap S$ sont fermées. Soit $f_\infty \colon S \to M_\infty = \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ une surface plissée qui réalise $\alpha \cap S$.

Choisissons un petit $\epsilon > 0$. Par l'argument classique d'approximation par un réseau ferroviaire de petite courbure [Th1, §8.10], [CEG, §5.3], on peut approcher f_∞ par une application $g_\infty : S \to M_\infty$ telle que: pour un certain réseau ferroviaire épaissi U portant le support de $\alpha \cap S$, l'application g_∞ envoie chaque traverse de U sur un point et chaque arête de U sur un arc géodésique de M_∞. L'adhérence du complémentaire de U admet une triangulation dont tous les sommets sont dans le bord de U, et pour laquelle g_∞ est totalement géodésique sur chaque face de la triangulation; g_∞ envoie de manière monotone chaque courbe (fermée ou infinie) portée par U sur une courbe géodésique par morceaux de M_∞ dont les parties géodésiques sont de longueur au moins 1, et faisant un angle externe inférieur à ϵ en chacun de ses coins. Par convergence algébrique, pour n assez grand, $g_\infty : S \to M_\infty = \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$ se déforme en une application similaire $g_n : S \to M_n = \mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$, qui envoie chaque courbe portée par U sur une courbe de M_n géodésique par morceaux, dont les parties géodésiques sont de longueur au moins 1 et faisant un angle externe inférieur à 2ϵ en chacun de ses coins. Par l'hypothèse de convergence Hausdorff, $\alpha_n \cap S$ est portée par U pour n assez grand. Pour ϵ suffisamment petit, chaque feuille du support de $\alpha_n \cap S$ est donc envoyée sur une courbe quasi-géodésique de M_n, et g_n est donc proche d'une surface plissée $f'_n : S \to M_n$ réalisant $\alpha_n \cap S$; voir [Th1, §8.10], [CEG, §5.3].

En prenant des ϵ de plus en plus petits et quitte à passer à une sous-suite, on obtient ainsi une suite de surfaces plissées $f'_n : S \to M_n$ réalisant $\alpha_n \cap S$ et qui convergent vers $f_\infty : S \to M_\infty$.

Toutefois, on a une autre surface plissée réalisant $\alpha_n \cap S$, à savoir $f_n : S \to M_n$. Par unicité de la réalisation [Th1], [CEG], f_n et f'_n coïncident sur α_n après précomposition par une isotopie de S. Comme, de plus, la restriction de f_n à chaque composante S_1 de $S - \alpha_n$ est totalement géodésique, la surface plissée f'_n est également totalement géodésique sur S_1, par convexité de la surface totalement géodésique $f_n(S_1)$ et puisque $\alpha_n \cap S$ est non-vide. On en déduit que $f'_n = f_n$, après précomposition par une isotopie de S. Par conséquent, les surfaces plissées $f_n : S \to M_n$ convergent vers $f_\infty : S \to M_\infty$. Ceci termine la démonstration du lemme 18 quand $\alpha \cap S$ est réalisable dans M_∞.

Considérons maintenant le cas où $\alpha \cap S$ n'est pas réalisable dans M_∞. Nous allons en fait voir que ce cas ne peut se produire, mais cela va prendre un peu de temps.

Par notre remarque préliminaire, ce cas est déjà exclus lorsque l'on est sous les hypothèses du théorème 2. Nous pouvons donc supposer que l'on est sous les hypothèses du théorème 1, et en particulier que le bord $\partial\overline{M}$ est incompressible. Nous allons donc pouvoir utiliser les résultats de [Th1], [Bo1] sur la structure des bouts géométriquement infinis de M_∞.

Si c est une courbe fermée dans $S - \alpha$ qui n'est pas homotope dans S à un bout de S, alors c est homotope à une géodésique fermée c_n de M_n qui est contenue dans la surface totalement géodésique $f_n(S-\alpha_n)$. Par définition de γ, la longueur de c_n est bornée inférieurement, et on en conclut que $\rho_\infty(c)$ est loxodromique. Par conséquent, les seules courbes de $S-\alpha$ qui sont paraboliques pour ρ_∞ sont celles qui sont homotopes dans S aux bouts de S. Puisque α n'est pas réalisable dans M_∞, il s'ensuit que S est homotope à un bout b de M_∞ relatif aux pointes, que b est géométriquement infini, et que le support de α est la lamination terminale de ce bout b. En particulier, α remplit la surface S en ce sens que toute courbe fermée de $S-\alpha$ est homotope dans S à un bout de S.

Soit (N_∞, y_∞) la limite géométrique de la famille de variétés hyperboliques pointées (M_n, x_n), après passage à une sous-suite. Considérons l'application de revêtement naturelle $M_\infty \to N_\infty$, laquelle envoie x_∞ sur y_∞. Par le théorème de revêtement de [Th1, §9.2] (voir également [Ca]), ou bien le bout géométriquement infini b se projette en un revêtement d'indice fini sur un bout géométriquement infini b' (relatif aux pointes) de N_∞, ou bien N_∞ a un revêtement d'indice fini qui fibre sur le cercle.

En fait, le deuxième cas ne peut se produire. En effet, dans ce cas-là, N_∞ est de volume fini. Par conséquent, N_∞ contient une sous-variété compacte N'_∞ dont le volume est très proche du volume de N_∞ et dont le bord est une famille de tores et de bouteilles de Klein d'aire très petite. Par convergence géométrique, M_n contient une copie quasi-isométrique N'_n de N'_∞, dont le volume est très proche de celui de N'_∞ et dont le bord $\partial N'_n$ a une aire très proche de celle de $\partial N'_\infty$. Chaque composante de $\partial N'_n$, ou bien borde un tore ou une bouteille de Klein solide, ou bien est parallèle à une pointe de M_n. Un peu de géométrie hyperbolique montre alors que $\partial N'_n$ borde un 3-cycle Z localement fini dont le volume est borné par l'aire de $\partial N'_n$, et est donc très petit. Il s'ensuit que $N'_n - Z$ est un cycle localement fini, de volume fini, et de degré 1 dans M_n. Mais ceci contredit le fait que M_n est de volume infini.

Par conséquent, le bout b de M_∞ se projette en un revêtement d'indice fini sur un bout géométriquement infini b' de N_∞. En particulier, pour tout $R>0$, il existe une surface plissée $g_\infty\colon S \to M_\infty$ dont l'image est contenue dans le bout b, et dont la projection dans N_∞ est contenue dans un voisinage du bout b' et évite la boule $B_{N_\infty}(y_\infty, R+1)$ de rayon $R+1$ centrée en y_∞. Par approximation par réseau ferroviaire de petite courbure (voir la discussion plus haut du cas où $\alpha \cap S$ est réalisable), la surface plissée $g_\infty\colon S \to M_\infty$ se déforme pour n suffisamment grand en une application plissée $g_n\colon S \to M_n$ qui, par convergence géométrique de $B_{M_n}(x_n, R+1)$ vers $B_{N_\infty}(y_\infty, R+1)$, évite la boule $B_{M_n}(x_n, R)$.

Puisque l'on est sous les hypothèses du théorème 1, $\partial\overline{M}$ est incompressible et $\pi_1\big(\overline{M}, \partial_{\chi<0}\overline{M}\big)$ est donc non-trivial [Wa]. Choisissons deux arcs k et k' joignant le point base x_0 de M à $\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma$ de sorte que leur concaténation représente un élément non-trivial de $\pi_1\big(\overline{M}, \partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma\big)$ et de sorte que k joigne

x_0 à S. Comme au-dessus du lemme 17, les arcs k et k' définissent respectivement des arcs k_n et k'_n joignant le point base x_n de M_n à $\partial C_{m_n} - \gamma_n$, et bien définis modulo homotopie d'arcs joignant x_n à $\partial C_{m_n} - \gamma_n$. (Rappelons que γ_n est l'union des géodésiques fermées de M_n correspondant aux composantes non-paraboliques de γ.) Par le lemme 17, on peut fixer la constante $R > 0$ et choisir ces arcs k_n et k'_n de sorte que leur longueur soit inférieure à R. De plus, on peut supposer k_n et k'_n géodésiques, et par conséquent contenus dans C_{m_n} puisque l'on s'est arrangé pour que le point base x_n soit contenu dans C_{m_n}.

Par construction, le complété de S pour la métrique induite par g_n est une surface $\overline{S}$ à bord, obtenue en rajoutant une composante de bord à chaque bout de S qui est adjacent à une composante de $\gamma - \gamma^{\mathrm{P}}$. Si l'on étend g_n en $g_n\colon \overline{S} \to M_n$, alors g_n envoie chaque composante de $\partial\overline{S}$ sur une composante de $\gamma_n \subset \partial C_{m_n}$, et envoie proprement chaque bout de $\overline{S}$ vers une pointe de M_n. Remarquons que l'application plissée $f_n\colon S \to S_n \subset \partial C_{m_n} \subset M_n$ s'étend aussi en une application $f_n\colon \overline{S} \to M_n$ qui envoie chaque composante de $\partial\overline{S}$ sur la même composante de γ_n que g_n, et chaque bout de S sur la même pointe que g_n.

Par construction, les applications f_n et g_n sont homotopes, et puisque M est atoroïdale, elles sont donc homotopes par une homotopie propre fixant $\partial\overline{S}$. Il s'ensuit que g_n a le même nombre d'intersection géométrique avec la concaténation $k_n \cup k'_n$ que f_n, au sens de la définition de [Bo1, §3.1]. Puisque $k_n \cup k'_n$ représente un élément non-trivial de $\pi_1(C_{m_n}, \partial C_{m_n} - \gamma_n)$, ce nombre d'intersection est égal à 2 ou à 1, selon que l'extrémité de k' est dans S ou non. En particulier, l'image de g_n doit rencontrer $k_n \cup k'_n$. Mais ceci contredit le fait que, puisque leur longueur est inférieure à R, les arcs k_n et k'_n sont contenus dans la boule $B_{M_n}(x_n, R)$, tandis que celle-ci est disjointe de l'image de g_n pour n assez grand.

Cette contradiction montre que le cas où α n'est pas réalisable ne peut donc se produire, ce qui termine la démonstration que la suite de surfaces plissées $f_n\colon S \to M_n$ converge vers une surface plissée $f_\infty\colon S \to M_\infty$.

Il reste à démontrer que f_∞ est localement convexe et de lamination mesurée de plissage $\alpha \cap S$. Une surface plissée localement convexe est totalement déterminée par la métrique induite sur son domaine de définition et par sa lamination géodésique mesurée de plissage, et dépend continûment de ces données à isométrie près (voir par exemple [EpM], [KaT], [Bo4]). Par construction, la métrique μ_n induite par f_n sur S converge vers une métrique μ_∞ sur S après passage à une sous-suite: En effet, lorsque nous avons exhibé f_n comme une perturbation de f_∞, l'argument de réseau ferroviaire à petite courbure que nous avons utilisé montre également que chaque courbe fermée de S est homotope à une courbe de longueur bornée pour μ_n. Puisque μ_n converge vers μ_∞ et puisque la lamination mesurée de plissage $\alpha_n \cap S$ converge vers $\alpha_\infty \cap S$, il s'ensuit que f_n converge vers une surface plissée de métrique induite μ_n et de lamination mesurée de plissage $\alpha \cap S$. Comme la limite des f_n est égale à f_∞, on en conclut que la lamination mesurée de plissage f_∞ est égale à $\alpha \cap S$. $\square$

Pour chaque composante S de $\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma$, nous avons ainsi obtenu une surface plissée $f_\infty : S \to M_\infty$, projection d'une surface plissée $\widetilde{f}_\infty : \widetilde{S} \to \mathbb{H}^3$ où $\widetilde{S}$ est une composante arbitraire de la préimage de S dans le revêtement universel $\widetilde{\overline{M}}$ de $\overline{M}$. Par considération de toutes les composantes S de $\partial_{\chi<0}\overline{M}-\gamma$ et de toutes les composantes $\widetilde{S}$ de leur préimage dans $\widetilde{\overline{M}}$, ceci fournit une surface plissée $f_\infty : \partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma \to M_\infty$, projection d'une surface plissée $\widetilde{f}_\infty$: $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\gamma} \to \mathbb{H}^3$ où $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}}$ est la préimage de $\partial_{\chi<0}\overline{M}$ dans $\widetilde{\overline{M}}$ et où $\widetilde{\gamma}$ est la préimage de γ dans $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}}$. De plus, f_∞ est localement convexe et admet $\alpha - \gamma$ pour la lamination mesurée de plissage.

Lemme 19. *La multicourbe γ est égale à l'union des feuilles fermées de poids π de α.*

Démonstration. Montrons d'abord que toute feuille fermée c de poids π de α est contenue dans γ.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors c est aussi une feuille fermée de α_n par la condition (iii) de la proposition 8, mais n'appartient pas à la famille $\gamma^{\mathrm{P}} \subset \gamma$ des feuilles de poids π de α_n. (Rappelons que l'on s'est arrangé pour que les α_n aient les mêmes feuilles de poids π, et que l'union γ^{P} de celles-ci est contenue dans γ.) Il s'ensuit que c est homotope à une géodésique fermée c_n de $M_n \cong \mathbb{H}^3/\rho_n(\pi_1(M))$ qui est contenue dans le bord ∂C_{m_n} du cœur convexe. Considérons une composante $\widetilde{c}_n$ de la préimage de c_n dans $\mathbb{H}^3$. Près de $\widetilde{c}_n$, la préimage $\widetilde{C}_{m_n}$ du cœur convexe coïncide avec un dièdre D_n délimité dans $\mathbb{H}^3$ par deux demi-plans hyperboliques se rencontrant le long de $\widetilde{c}_n$. Par convergence de la surface plissée $\widetilde{f}_n : \partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\gamma} \to \mathbb{H}^3$, le dièdre D_n converge vers un dièdre D_∞ dont l'angle diédral externe est égal à la limite de l'angle diédral externe de D_n, c'est-à-dire au poids π de c dans α. En d'autres termes, D_∞ est réduit à un demi-plan hyperbolique dans $\mathbb{H}^3$.

Comme l'image de $\widetilde{f}_n$ est contenue dans D_n, l'image de la surface plissée $\widetilde{f}_\infty : \partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\gamma} \to \mathbb{H}^3$ est contenue par continuité dans le demi-plan D_∞. Ceci n'est possible que si la lamination mesurée de plissage $\alpha - \gamma$ de f_∞ est uniquement formée de courbes fermées de poids π. Si l'on remarque que l'image de $\widetilde{f}_\infty$ dans le demi-plan D_∞ est invariante par $\rho_\infty(\pi_1(M))$ et si l'on se rappelle que la représentation ρ_∞ est fidèle, on en déduit facilement que $\overline{M}$ est homéomorphe à un I–fibré sur une surface compacte S à bord, et ceci de sorte que α soit une section du fibré au-dessus du bord ∂S. Comme un tel fibré admet beaucoup d'anneaux et rubans de Möbius essentiels disjoints de α, ceci contredit les hypothèses des théorèmes 1 et 2.

Réciproquement, montrons que chaque composante de γ est une feuille fermée de poids π de α. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'une composante c de γ ne soit pas une feuille fermée de poids π de α. Quitte à passer au revêtement d'orientation de M, on peut supposer que c ne renverse pas l'orientation dans $\partial\overline{M}$

Puisque c n'est pas une feuille fermée de poids π de α_n, elle ne correspond pas à une pointe de ∂C_{m_n} et est donc homotope à une géodésique fermée c_n de ∂C_{m_n}. Par définition de γ, la longueur de c_n tend vers 0. D'après le lemme de Margoulis, c_n admet donc un voisinage collier dont la largeur L_n tend vers ∞. Il s'ensuit que le nombre d'intersection $i(c, \alpha_n)$ est inférieur ou égal à $l_{m_n}(\alpha_n)/L_n$. Par passage à la limite et puisque les longueurs $l_{m_n}(\alpha_n)$ sont uniformément bornées (lemme 12), on en déduit que $i(\alpha, c) = 0$.

Nous utilisons maintenant, de manière cruciale, l'hypothèse de convergence Hausdorff de la condition (iii) de la proposition 8. Celle-ci entraîne que pour n assez grand, c est ou bien disjointe du support de α_n, ou bien contenue dans celui-ci. En particulier, la géodésique c_n de la surface ∂C_{m_n} est aussi une géodésique de la métrique m_n de M.

Fixons une constante de Margoulis ε. Pour n suffisamment grand, soit U_n la composante de la partie fine $(\partial C_{m_n})^{\mathrm{f}}(\varepsilon)$ de ∂C_{m_n} qui contient c_n. Cette composante U_n est un anneau, puisque l'on s'est ramené au cas où c ne renverse pas l'orientation dans $\partial\overline{M}$. Un argument classique de géométrie hyperbolique montre que l'on peut choisir la constante de Margoulis ε (indépendamment de n) de sorte que toute géodésique simple de ∂C_{m_n} qui rencontre U_n rencontre aussi c_n. En particulier, $\alpha_n \cap U_n$ est égale à c_n ou à l'ensemble vide. Ceci entraîne que chaque composante de $U_n - c_n$ est un anneau totalement géodésique. Ces deux anneaux forment un angle externe de θ_n le long de c_n, où θ_n est égal au poids de c dans α_n si c est contenue dans α_n, et est sinon égal à 0.

Soient S et S' les deux composantes (peut-être confondues) de $\partial\overline{M} - \gamma$ situées de part et d'autre de c. Soient $f_n : S \to M$ et $f'_n : S' \to M$ les surfaces plissées correspondantes, dont les images respectives sont contenues dans ∂C_{m_n} et délimitées par les géodésiques fermées correspondant à γ. Le lemme 18 montre que ces surfaces plissées convergent vers des surfaces plissées dans $M_\infty = \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$. En particulier, les deux composantes de ∂U_n restent à distance uniformément bornée l'une de l'autre dans M_n.

D'un autre côté, l'anneau U_n est formé de deux anneaux totalement géodésiques de largeur $A_n = \operatorname{arcsh}\left(\operatorname{sh}\frac{\varepsilon}{2}/\operatorname{sh}\frac{l_{m_n}(c_n)}{2}\right)$ qui se rencontrent sous un angle externe θ_n. L'anneau U_n est contenu dans un tube de Margoulis de M_n et puisque ces tubes sont isométriquement plongés dans M_n, la distance mesurée dans le tube entre les deux composantes ∂U_n est égale à la distance mesurée dans M_n. Pour estimer la distance dans le tube, on relève U_n en une bande dans $\mathbb{H}^3$; la formule des cosinus en géométrie hyperbolique montre que la distance dans $\mathbb{H}^3$ entre les deux composantes de ∂U_n est égale à $B_n = \operatorname{arch}\big(\operatorname{ch}^2 A_n + \cos\theta_n \operatorname{sh}^2 A_n\big)$.

Par définition de c, les angles θ_n ne peuvent s'approcher de π. Puisque $l_{m_n}(c_n)$ tend vers 0, A_n tend vers l'infini, et il s'ensuit que B_n tend également vers l'infini. Mais ceci contredit notre conclusion précédente que la distance entre les deux composantes de ∂U_n est uniformément bornée, et fournit ainsi la contradiction cherchée.

Par conséquent, toute composante c de γ est une feuille fermée de poids π de α. □

7. Fin de la démonstration du lemme de fermeture

Maintenant que nous contrôlons la convergence du bord de ∂C_{m_n}, nous pouvons terminer la démonstration du lemme de fermeture, c'est-à-dire de la proposition 8.

Lemme 20. *Il existe un sous-ensemble convexe fermé C de M_∞ tel que la surface plissée $f_\infty : \partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma \to M_\infty$ induit un homéomorphisme entre $\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma$ et l'union de certaines composantes du bord ∂C.*

Démonstration. Soit P une composante de $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\alpha}$, où $\widetilde{\alpha}$ est la préimage du support de α dans $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}}$. Soit $\widetilde{f}_\infty(P)$ son image par $\widetilde{f}_\infty : \partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\gamma} \to \mathbb{H}^3$, ou plus précisément l'image par $\widetilde{f}_\infty$ de la composante correspondante du complémentaire de la lamination μ_∞–géodésique de $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\gamma}$ associée à $\widetilde{\alpha} - \widetilde{\gamma}$, où μ_∞ est la métrique induite par $\widetilde{f}_\infty$ sur $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\gamma}$. Puisque la lamination mesurée de plissage de $\widetilde{f}_\infty$ est égale à $\widetilde{\alpha} - \widetilde{\gamma}$, $\widetilde{f}_\infty(P)$ est totalement géodésique, et contenue dans un plan hyperbolique Π^P_∞ de $\mathbb{H}^3$. L'orientation transverse de $\partial_{\chi<0}\overline{M}$ dans $\overline{M}$ détermine une orientation transverse pour $\widetilde{f}_\infty(P)$ et Π^P_∞. Soit H^P_∞ le demi-espace fermé délimité par Π^P_∞ dans $\mathbb{H}^3$ et situé du côté de Π^P_∞ correspondant au côté intérieur de $\partial_{\chi<0}\overline{M}$ dans $\overline{M}$. Soit $\widetilde{C}$ l'intersection des demi-espaces H^P_∞ ainsi associés à toutes les composantes P de $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\alpha}$. Par construction, $\widetilde{C}$ est fermé, convexe, et invariant par $\rho_\infty(\pi_1(M))$. Par conséquent, $\widetilde{C}$ est la préimage d'un sous-ensemble convexe fermé C de $M_\infty = \mathbb{H}^3/\rho_\infty(\pi_1(M))$.

Par l'hypothèse (iii) de la proposition 8, le support de α_n converge vers celui de α pour la topologie de Hausdorff. Ceci associe une composante connexe P_n de $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\alpha}_n$ à la composante connexe P de $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\alpha}$, pour n assez grand. L'image $\widetilde{f}_n(P_n)$, définie comme ci-dessus, de P_n par la surface plissée $\widetilde{f}_n : \partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\gamma} \to \mathbb{H}^3$ est contenue dans un plan hyperbolique $\Pi^{P_n}_n$, lequel délimite un demi-espace fermé $H^{P_n}_n$ correspondant au côté intérieur de $\partial_{\chi<0}\overline{M}$.

Remarquons que la préimage $\widetilde{C}_{m_n}$ du cœur convexe C_{m_n} est contenue dans $H_n^{P_n}$, et rencontre $\Pi_n^{P_n}$ exactement le long de l'adhérence de $\widetilde{f}_n(P_n)$.

Soit Q une composante de $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\alpha}$, et soit Q_n la composante correspondante de $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\alpha}_n$, pour n assez grand. Par convergence de $\widetilde{f}_n$ vers $\widetilde{f}_\infty$, le demi-espace $H_n^{Q_n}$ converge vers H_∞^Q. D'autre part, comme la métrique induite μ_n converge vers μ_∞ et comme le support de α_n converge vers celui de α, $\widetilde{f}_n(P_n)$ converge vers $\widetilde{f}_\infty(P)$. Puisque $\widetilde{f}_n(P_n)$ est contenue dans $\widetilde{C}_{m_n}$ qui est contenue dans $H_n^{Q_n}$, on en déduit que $\widetilde{f}_\infty(P)$ est contenue dans H_∞^Q. Par conséquent, l'intersection $\widetilde{C}$ de tous les H_∞^Q contient $\widetilde{f}_\infty(P)$. Par considération de toutes les composantes P de $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\alpha}$, il s'ensuit que l'image de la surface plissée $\widetilde{f}_\infty\colon \partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\gamma} \to \mathbb{H}^3$ est contenue dans $\widetilde{C}$, et en fait dans le bord $\partial\widetilde{C}$ puisque $\widetilde{f}_\infty(P) \subset \partial H_\infty^P$.

Par conséquent, l'image de la surface plissée $f_\infty\colon \partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma \to M_\infty$ est contenue dans le bord ∂C.

Le cocycle transverse de plissage de la surface plissée f_∞ est une lamination mesurée qui n'a pas de feuille fermée dont le poids est un multiple de π, à savoir $\alpha - \gamma$. L'application f_∞ est donc localement injective. Par convexité, le bord ∂C est une variété topologique de dimension $\leqslant 2$, peut-être à bord. Il s'ensuit que la restriction $f_\infty : \partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma \to \partial C$ est un homéomorphisme local. Par ailleurs, les bouts de $\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma$ sont envoyés par f_∞ sur des anneaux totalement géodésiques convergeant vers des pointes de M_∞. L'application f_∞ est donc propre, et $f_\infty\colon \partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma \to \partial C$ est par conséquent un revêtement. En particulier, l'image de f_∞ est une union de composantes de ∂C.

Pour montrer que f_∞ est un homéomorphisme envoyant $\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma$ sur son image dans ∂C, il suffit donc maintenant de montrer que f_∞ est globalement injective.

Nous allons montrer que $\widetilde{f}_\infty$ est injective. Supposons que ce ne soit pas le cas. Puisque $\widetilde{f}_\infty : \partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\gamma} \to \partial\widetilde{C}$ est un revêtement, on aurait alors deux points distincts x et $y \in \partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\alpha}$ qui auraient la même image par $\widetilde{f}_\infty$. Soient P et Q les composantes de $\partial_{\chi<0}\widetilde{\overline{M}} - \widetilde{\alpha}$ qui contiennent respectivement x et y. Soient Π_∞^P, H_∞^P, P_n, $\Pi_n^{P_n}$, $H_n^{P_n}$ et Π_∞^Q, H_∞^Q, Q_n, $\Pi_n^{Q_n}$, $H_n^{Q_n}$ respectivement associés à P et Q comme précédemment. Remarquons que P et Q sont distinctes, puisque $\widetilde{f}_\infty$ est injective sur chacune de ces composantes. Comme $\widetilde{f}_\infty(P)$ et $\widetilde{f}_\infty(Q)$ coïncident avec ∂C au voisinage de $\widetilde{f}_\infty(x) = \widetilde{f}_\infty(y)$, ou bien les demi-espaces H_∞^P et H_∞^Q sont égaux, ou bien leur intersection est égale au plan $\Pi_\infty^P = \Pi_\infty^Q$. Le premier cas n'est pas compatible avec le fait que, pour n assez grand, $\widetilde{f}_n(P_n)$ et $\widetilde{f}_n(Q_n)$ sont disjoints, passent près du point $\widetilde{f}_\infty(x) = \widetilde{f}_\infty(y)$ et sont tous deux contenus dans $H_n^{P_n} \cap H_n^{Q_n}$, tandis que ces deux demi-espaces sont proches de $H_\infty^P = H_\infty^Q$. Dans le deuxième cas, le plan $\Pi_\infty^P = \Pi_\infty^Q$ est égal à $\widetilde{C}$, et est donc invariant par l'action de $\rho_\infty(\pi_1(M))$; on en déduit facilement que $\overline{M}$ est un fibré en intervalles sur une surface compacte S telle que $\alpha = \gamma$ est une section du fibré au-dessus de ∂S, ce qui contredit les hypothèses des théorèmes 1 et 2.

Ceci démontre que $\widetilde{f}_\infty$, et donc f_∞, est injective. Par conséquent, l'application de revêtement f_∞ induit donc un homéomorphisme entre $\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma$ et son image, laquelle est formée d'un nombre fini de composantes de ∂C. $\square$

Par convexité, C contient le cœur convexe C_∞ de M_∞. Nous allons montrer au cours de la démonstration du lemme 21 ci-dessous que C est en fait égal à ce cœur convexe C_∞.

LEMME 21. *La variété hyperbolique M_∞ est géométriquement finie non-fuchsienne, et l'équivalence d'homotopie $M \to M_\infty$ peut être réalisée par un difféomorphisme $M \cong M_\infty$ pour lequel la lamination mesurée de plissage correspond à $\alpha \in \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$.*

Démonstration. À chaque composante c de γ correspondent un ou deux bouts de $\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma$, lesquels fournissent dans $f_\infty(\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma)$ un ou deux anneaux totalement géodésiques convergeant dans M_∞ vers la pointe de rang 1 associée à c. Si, pour chaque composante c de γ, on enlève de $f_\infty(\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma)$ ces un ou deux anneaux totalement géodésiques et on reconnecte le bord par un anneau ou ruban de Möbius fermé, on obtient ainsi dans M_∞ une surface compacte S_∞. Par considération de la même construction dans $M \cup (\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma)$, cette surface S_∞ est homologue à 0 dans l'homologie de M_∞ relative aux pointes de rang 2 et à coefficients tordus par l'orientation de M_∞. En particulier, S_∞ borde un cycle de volume fini. Par ailleurs, le cycle $f_\infty(\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma) - S_\infty$ est formé de l'union, pour chaque composante c de γ, de un ou deux anneaux totalement géodésiques convergeant vers une pointe et connectés par un anneau ou ruban de Möbius fermé; en particulier, ce 2–cycle borde également un 3-cycle de volume fini. Par conséquent, $f_\infty(\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma)$ borde dans M_∞ un 3-cycle de volume fini.

Nous avons vu au lemme 20 que $f_\infty(\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma)$ est une union de composantes de ∂C. Puisque la projection $\mathbb{H}^3 - \widetilde{C} \to \partial\widetilde{C}$ n'augmente pas les distances (voir par exemple [EpM, §1.3]) et commute avec l'action de $\rho_\infty(\pi_1(M))$, chaque composante de $M_\infty - C$ est de volume infini. Il s'ensuit que $f_\infty(\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma)$ est égale au bord ∂C tout entier, et que C est de volume fini. Remarquons également que l'intérieur de C est non vide puisque $f_\infty : \partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma \to \partial C$ est injective.

Le cœur convexe C_∞ de M_∞ est contenu dans C. Par ailleurs, le bord de C est l'image de la surface plissée f_∞, et est donc contenu dans C_∞. Ceci entraîne que C est égal à l'union de C_∞ et d'un certain nombre de composantes de $M_\infty - C_\infty$. Puisque C est de volume fini et puisque, par l'argument précédent, les composantes de $M_\infty - C_\infty$ sont de volume infini, on en conclut que $C_\infty = C$.

En particulier, le cœur convexe C_∞ est de volume fini non-nul, ce qui entraîne que la variété hyperbolique M_∞ est géométriquement finie non-fuchsienne.

On a ainsi construit une équivalence d'homotopie entre $M \cup \big(\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma\big)$ et C_∞ qui est un homéomorphisme entre les bords de ces variétés. Par le théorème de Waldhausen [Wa] (appliqué à la variété compacte obtenue en tronquant les pointes, comme au début de cette démonstration), on peut donc réaliser cette équivalence d'homotopie par un homéomorphisme. Ceci fournit une identification entre M et la variété hyperbolique M_∞ pour laquelle la projection de $\partial_{\chi<0}\overline{M} - \gamma$ sur ∂C_∞ correspond à la surface plissée f_∞. Puisque la lamination mesurée de plissage de f_∞ est égale à $\alpha - \gamma$, la lamination mesurée de plissage de la métrique hyperbolique $m_\infty \in \mathcal{GF}(M)$ ainsi définie sur M est égale à $\alpha \in \mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}\big)$. □

Ceci termine la démonstration du lemme de fermeture, c'est-à-dire de la proposition 8.

Un sous-produit de la démonstration de la proposition 8 est le raffinement suivant, dont nous aurons besoin par la suite.

COMPLÉMENT 22. *Sous les hypothèses et conclusions de la proposition* 8, *la représentation d'holonomie* $\rho_\infty : \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}\big(\mathbb{H}^3\big)$ *associée à la métrique* $m \in \mathcal{GF}(M)$ *est la limite des représentations* $\rho_n : \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}\big(\mathbb{H}^3\big)$ *associées aux métriques* m_n, *quitte à passer à une sous-suite et à conjuguer ces représentations par des éléments de* $\mathrm{Isom}\big(\mathbb{H}^3\big)$. □

8. Démonstration des théorèmes 2 et 3

Dans cette section, nous nous restreignons au cas où le support de $\alpha \in \mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}\big)$ est une multicourbe a contenue dans $\partial\overline{M}$.

Soit $\mathcal{G}F(M;a)$ le sous-ensemble de $\mathcal{G}F(M)$ formé des métriques hyperboliques géométriquement finies sur M dont la lamination mesurée de plissage a pour support a. Si $\mathcal{G}F(M;a)$ est non-vide, les restrictions topologiques sur a fournies par les propositions 4 et 7 entraînent que tout homéomorphisme de $\overline{M}$ qui respecte a et qui est homotope à l'identité est en fait isotope à l'identité, par [Joh]. Par conséquent, un élément de $\mathcal{GF}(M;a)$ est complètement déterminé par (la classe de conjugaison de) sa représentation d'holonomie $\rho\colon \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}\big(\mathbb{H}^3\big)$. Munissons $\mathcal{GF}(M;a)$ de la topologie ainsi induite par la topologie de la convergence algébrique sur l'espace de ces représentations.

Si k est le nombre de composantes de a, on a une application naturelle $\Theta\colon \mathcal{GF}(M;a) \to \,]0,\pi]^k$ qui associe à chaque métrique de $\mathcal{GF}(M;a)$ les poids des composantes de a pour sa mesure de plissage.

LEMME 23. *L'application* $\Theta\colon \mathcal{GF}(M;a) \to \,]0,\pi]^k$ *est un homéomorphisme local.*

Démonstration. Par un argument de doublage, ceci découle relativement facilement d'un résultat de C. Hodgson et S. Kerckhoff [HoK] sur les métriques hyperboliques à singularités coniques.

Soit $D\overline{M}$ la variété obtenue en recollant deux copies de $\overline{M}$ le long de $\partial_{\chi<0}\overline{M}$, et soit DM l'intérieur de $D\overline{M}$. La multicourbe a définit alors une sous-variété de dimension 1 de DM, que l'on notera encore a.

Pour une métrique $m \in \mathcal{GF}(M; a)$, le cœur convexe C_m est homéomorphe au complément dans $M \cup \partial_{\chi<0}\overline{M}$ des composantes de a qui ont poids π pour la mesure de plissage de m, et le bord ∂C_m est totalement géodésique sauf le long de l'union a^* des m-géodésiques de M associées aux composantes de a de poids différent de π. Si l'on forme le double DC_m de $C_m - a^*$ le long de $\partial C_m - a^*$, ce double s'identifie de manière naturelle à $DM - a$, et la métrique de C_m induit sur $DC_m = DM - a$ une métrique hyperbolique en général incomplète. La complétion $\overline{DC}_m$ de cette métrique est une variété hyperbolique à singularités coniques au sens de [HoK]. Une composante de a qui a poids $\theta < \pi$ pour la mesure de plissage de m correspond dans $\overline{DC}_m$ à une courbe de points singuliers d'angle de cône $2\pi - 2\theta$; près d'une composante de a qui a poids π pour la mesure de plissage, la métrique de DC_m est complète et fournit une pointe de rang 2 de $\overline{DC}_m$.

Soit $\mathcal{C}(DM; a)$ l'espace des classes d'isotopie de métriques de ce type sur $DM - a$. Plus précisément, un élément de $\mathcal{C}(DM; a)$ est représenté par une métrique hyperbolique sur $DM - a$ dont la complétion est une métrique hyperbolique à singularités coniques sur DM moins un certain nombre de composantes de a (correspondant à des pointes de la métrique). Munissons $\mathcal{C}(DM; a)$ de la topologie de convergence C^∞ sur les sous-ensembles compacts de $DM - a$. Localement, un élément de $\mathcal{C}(DM; a)$ est déterminé par la classe de conjugaison de sa représentation d'holonomie $\pi_1(DM - a) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$, et la topologie de $\mathcal{C}(DM; a)$ coïncide avec la topologie induite par la topologie de la convergence simple sur l'espace de ces représentations (voir par exemple [CEG, §1.7]).

La construction de doublage ci-dessus fournit donc une application $\Delta : \mathcal{GF}(M; a) \to \mathcal{C}(DM; a)$. Nous allons montrer que Δ induit un homéomorphisme sur son image.

D'abord, la donnée de l'holonomie $\pi_1(M) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ d'une métrique $m \in \mathcal{GF}(M; a)$ détermine de façon continue les axes correspondant aux composantes de a, et donc les plans de $\mathbb{H}^3$ qui contiennent les faces géodésiques de $\partial\widetilde{C}_m$, et donc aussi les angles de plissage le long des composantes de a. On en déduit que l'holonomie $\pi_1(DM - a) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ de DC_m dépend continûment de m. L'application Δ est donc continue.

Réciproquement, un élément de $\mathcal{C}(DM; a)$ est dans l'image de Δ si et seulement si il est représenté par une métrique sur $DM - a$ pour laquelle l'involution de double τ, qui échange les deux copies de $\overline{M}$, est une isométrie. En effet, pour une métrique $m' \in \mathcal{C}(DM; a)$ invariante par τ, on peut reconstituer une métrique $m \in \mathcal{GF}(M;a)$ avec $\Delta(m) = m'$ en décidant que son cœur convexe C_m est isométrique à la complétion du quotient par τ de $DM - a$, muni de la métrique m', et en étendant la métrique de C_m à M par le modèle standard. On en déduit que Δ est un homéomorphisme sur son image.

On a une application naturelle $\Gamma\colon \mathcal{C}(DM;a) \to [0,2\pi[^k$ qui à une métrique associe les angles de cône le long des composantes de a (par définition, l'angle de cône est 0 pour une composante de a qui correspond à une pointe de la métrique). Le résultat principal de [HoK] affirme que Γ est un homéomorphisme local. Comme $\Theta = R^{-1} \circ \Gamma \circ \Delta$, où $R\colon]0,\pi]^k \to [0,2\pi[^k$ est l'application diagonale qui est définie par $\theta \mapsto 2\pi - 2\theta$ sur chaque facteur, il suffit donc de montrer que l'image de Δ est ouverte dans $\mathcal{C}(DM;a)$.

L'involution $\tau : DM \to DM$ induit une application $\tau^* : \mathcal{C}(DM;a) \to \mathcal{C}(DM;a)$ qui, par construction, satisfait $\Gamma \circ \tau^* = \Gamma$. Puisque Γ est un homéomorphisme local, on en déduit que τ^* est égale à l'identité sur un voisinage U de l'image de Δ dans $\mathcal{C}(DM;a)$. Pour une métrique $m \in U \subset \mathcal{C}(DM;a)$, le fait que $\tau^*(m) = m$ veut dire que l'application τ est homotope à une m–isométrie τ' par une isotopie de DM respectant a. Remarquons que l'isométrie $(\tau')^2$ est isotope à $\tau^2 = \mathrm{Id}$ par une isotopie respectant a; elle se relève donc en une isométrie T du revêtement universel $(DM - a)^\sim$ de $DM - a$ qui déplace les points d'une quantité uniformément bornée. Ceci entraîne que T est l'identité. Pour voir cela, fixons un point $x_0 \in (DM - a)^\sim$. Pour presque tout vecteur v en x_0, il existe une géodésique bi-infinie g_v de $(DM - a)^\sim$ qui est tangente à v en x_0 et qui est homotope à $T(g_v)$ par une homotopie qui déplace les points d'une quantité uniformément bornée; en considérant l'application de développement $(DM - a)^\sim \to \mathbb{H}^3$, on en déduit que $T(g_v) = g_v$. La propriété étant vérifiée pour presque tout v, on en déduit que $T(x_0) = x_0$ et que la différentielle de T en x_0 est l'identité. Par conséquent T est l'identité sur un voisinage de x_0 et donc partout sur $(DM - a)^\sim$. En particulier, $(\tau')^2$ est l'identité. Dans la variété de Haken $DM - a$, on a ainsi deux involutions τ et τ' qui sont homotopes. Un argument standard de topologie de dimension 3 permet alors de conclure que τ et τ' sont conjuguées par une isotopie de $DM - a$ (voir [To] pour un résultat général, bien que la situation ici soit beaucoup plus simple). Si l'on change la métrique m par cette isotopie, on peut ainsi faire en sorte que τ respecte la métrique m. En particulier, la classe d'isotopie de m est contenue dans l'image de Δ. Comme ceci est vrai pour tout $m \in U$, il s'ensuit que l'ouvert U est contenu dans, et donc égal à l'image de Δ. En particulier, cette image est ouverte.

Nous avons vu que $\Delta\colon \mathcal{GF}(M;a) \to \mathcal{C}(DM;a)$ est un homéomorphisme sur son image, que son image est ouverte, et que $\Gamma : \mathcal{C}(DM;a) \to [0,2\pi[^k$ est un homéomorphisme local. Par conséquent, $\Theta = R^{-1} \circ \Gamma \circ \Delta$ est un homéomorphisme local. $\square$

Les théorèmes 2 et 3 découlent immédiatement de l'énoncé suivant (et de la proposition 4 pour la nécessité des conditions).

Théorème 24. *Soit* $\overline{M}$ *une variété compacte de dimension* 3 *dont l'intérieur* M *admet une métrique hyperbolique, et soit* a *une multicourbe dans* $\partial\overline{M}$ *telle que tous les disques essentiels et tous les anneaux essentiels de* $\overline{M}$ *rencontrent* a. *Soit* $\mathcal{GF}(M;a)$ *l'espace des métriques hyperboliques géométriquement finies non-fuchsiennes sur* M *dont la lamination mesurée de plissage a pour support* a. *Alors l'application qui à une métrique* $m \in \mathcal{GF}(M;a)$ *associe sa lamination mesurée de plissage induit un homéomorphisme entre* $\mathcal{GF}(M;a)$ *et l'espace* P_a *des laminations géodésiques mesurées* $\alpha \in \mathcal{ML}(S)$ *de support* a *telles que*:

1. *le poids de chaque composante de* a *pour* α *est dans l'intervalle* $]0,\pi]$;
2. *pour tout disque essentiel* D *dans* $\overline{M}$, $i(\alpha, \partial D) > 2\pi$.

Démonstration. Identifions une lamination géodésique mesurée de support a au système des poids qu'elle associe aux composantes de a. On peut ainsi considérer P_a comme un sous-espace de $]0,\pi]^k$, où k est le nombre de composantes de a. Le théorème 24 équivaut alors à montrer que l'application $\Theta\colon \mathcal{GF}(M;a) \to]0,\pi]^k$ induit un homéomorphisme entre $\mathcal{GF}(M;a)$ et P_a. Remarquons que P_a est convexe, et contient le point $\Pi = (\pi,\ldots,\pi) \in]0,\pi]^k$, puisque les hypothèses garantissent que le bord d'un disque essentiel rencontre a en au moins 3 points.

La proposition 7 montre que l'image de Θ est contenue dans P_a. Par le lemme 23, il s'ensuit que sa restriction $\Theta\colon \mathcal{GF}(M;a) \to P_a$ est un homéomorphisme local. D'autre part, le lemme de fermeture de la proposition 8 et son complément 22 entraînent que cette application est propre. Par conséquent, $\Theta\colon \mathcal{GF}(M;a) \to P_a$ est une application de revêtement.

Par ailleurs, il découle des hypothèses sur $\overline{M}$ et a que le double $DM - a$ satisfait les hypothèses du théorème d'hyperbolisation de Thurston [Th2], [Ot3], [Ka]. Il existe donc une métrique hyperbolique (complète) sur $DM - a$. Le théorème de rigidité de Mostow [MoS] et les arguments déjà utilisés lors de la démonstration du lemme 23 nous permettent de choisir cette métrique de sorte que l'involution de double $\tau\colon DM - a \to DM - a$ soit une isométrie. Comme précédemment, ceci fournit une métrique $m \in \mathcal{GF}(M;a)$ telle que $\Theta(m) = \Pi$. Une nouvelle application du théorème de rigidité de Mostow montre alors que $\Theta^{-1}(\Pi)$ est formé d'exactement un point.

L'application $\Theta\colon \mathcal{GF}(M;a) \to P_a$ est donc un revêtement à exactement un feuillet, c'est-à-dire un homéomorphisme. □

Complément 25. *Sous les hypothèses du théorème* 24, *identifions une lamination géodésique mesurée de support* a *au système des poids qu'elle* *associe aux composantes de a. Alors, P_a est égal à l'intersection de $]0,\pi]^k$ avec un nombre fini de demi-espaces ouverts, où k est le nombre de composantes de a. De plus, l'adhérence de P_a dans $\mathbb{R}^k$ est un polytope convexe compact dont tous les sommets ont leurs coordonnées dans $\mathbb{Q}\pi$.*

Démonstration. Un système de poids $\theta \in]0,\pi]^k$ est dans P_a si et seulement si il satisfait la condition 2 du théorème 24. Celle-ci se traduit par une série d'inégalités de la forme $u(\theta) > 2\pi$, où u est une forme linéaire à coefficients entiers positifs ou nuls. Le résultat s'ensuit aisément. □

9. Démonstration du théorème 1

Nous démontrons le théorème 1 en deux étapes, selon que $\overline{M}$ est un I–fibré ou non. Rappelons que nous avons déjà démontré la nécessité des conditions du théorème 1 aux propositions 4, 5 et 7.

THÉORÈME 26. *Soit $\overline{M}$ une variété compacte de dimension 3 dont le bord $\partial\overline{M}$ est incompressible, qui n'est pas un I–fibré sur une surface sans bord, et dont l'intérieur M admet une métrique hyperbolique, et soit $\alpha \in \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ une lamination géodésique mesurée sur son bord telle que:*

1. *toute feuille fermée de α a un poids inférieur ou égal à π;*
2. *$i(\alpha, \partial A) > 0$ pour tout anneau essentiel A dans $\overline{M}$.*

Alors il existe sur M une métrique hyperbolique géométriquement finie non-fuchsienne m dont α est la lamination mesurée de plissage.

Démonstration. Choisissons une suite de multicourbes pondérées $\alpha_n \in \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ qui tendent vers α pour la topologie de $\mathcal{ML}(S)$, et dont le support tend vers le support de α pour la topologie de Hausdorff. Une telle suite existe toujours, par considération d'un réseau ferroviaire minimal portant α. De plus, si α a une feuille fermée c de poids π, alors c est également une composante de α_n pour n assez grand, par hypothèse de convergence Hausdorff, et on peut sans perte de généralité modifier légèrement la mesure transverse de α_n de sorte que le poids de c dans α_n soit inférieur ou égal à π.

Montrons que, pour n assez grand, les α_n satisfont les hypothèses du théorème 2.

La condition 3 du théorème 2 est automatique puisque l'on se restreint au cas où le bord $\partial\overline{M}$ est incompressible, de sorte que $\overline{M}$ ne contient pas de disque essentiel.

Vérifions maintenant la condition 1 du théorème 2, c'est-à-dire que α_n ne possède pas de feuille de poids strictement supérieur à π pour n assez grand. Supposons par l'absurde qu'il existe des n arbitrairement grands tels que α_n

ait une composante c_n de poids $> \pi$. On peut alors supposer que c'est le cas pour tout n, quitte à passer à une sous-suite. Comme α_n converge vers α dans $\mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}\big)$, les courbes c_n doivent toutes être égales à une courbe c pour n assez grand. Toujours par convergence dans $\mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}\big)$, c est une feuille fermée de poids $\geqslant \pi$ de α, et donc de poids exactement π par l'hypothèse 1 du théorème 26. Par notre choix des α_n, $c_n = c$ doit alors être également une feuille fermée de poids π de α_n, ce qui contredit la définition des c_n. Par conséquent, la condition 1 du théorème 2 est vérifiée par α_n pour n assez grand.

Pour vérifier la condition 2 du théorème 2 sur les anneaux essentiels de $\overline{M}$, nous allons avoir besoin de la *sous-variété caractéristique de M* au sens de [Joh], [JaS], qui classifie ces anneaux. Cette sous-variété caractéristique se scinde en deux parties V et W, où V admet une fibration de Seifert pour laquelle $V \cap \partial\overline{M}$ est une union de fibres, et où W est un I–fibré sur une surface à bord dont toutes les composantes sont de caractéristique d'Euler strictement négative, et telle que $W \cap \partial\overline{M}$ est le ∂I–fibré associé. Tout anneau essentiel A dans $\overline{M}$ peut être déformé de sorte qu'il soit contenu dans la sous-variété caractéristique, et donc dans la partie Seifert V ou dans le I–fibré W.

On veut montrer qu'une infinité des α_n satisfont la condition 2 du théorème 2. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, quitte à passer à une sous-suite, il existe une suite d'anneaux essentiels A_n dans $\overline{M}$ tels que $i(\alpha_n, \partial A_n) = 0$ pour tout n. De plus, par la propriété de la sous-variété caractéristique mentionnée ci-dessus, on peut supposer que, ou bien les A_n sont contenus dans la variété de Seifert V pour tout n, ou bien ils sont contenus dans le I–fibré W pour tout n.

Dans le premier cas, ∂A_n est une paire de courbes simples dans $V \cap \partial\overline{M}$. Or, $V \cap \partial_{\chi<0}\overline{M}$ est formée d'une famille finie d'anneaux et rubans de Möbius; en particulier, elle ne contient qu'un nombre fini de classes d'isotopie de courbes simples. Quitte à passer à une sous-suite, on peut donc supposer que les courbes $\partial A_n \cap \partial_{\chi<0}\overline{M}$ sont indépendantes de n à isotopie près. On obtient ainsi un anneau essentiel A dans $\overline{M}$ tel que $\partial A_n \cap \partial_{\chi<0}\overline{M}$ soit isotope à $\partial A \cap \partial_{\chi<0}\overline{M}$ pour tout n. Puisque $i(\alpha_n, \partial A_n) = 0$, on en conclut par passage à la limite que $i(\alpha, \partial A) = 0$. Mais ceci contredirait l'hypothèse 2 du théorème 26.

Dans le deuxième cas, les A_n sont tous contenus dans le I–fibré W et, par [Wa, §3], on peut de plus s'arranger de sorte qu'ils soient verticaux pour la fibration, c'est à dire qu'ils soient une union de fibres. Soit S la surface compacte à bord qui est la base du I–fibré, et soit $p\colon W \to S$ la projection de la fibration. L'anneau A_n se projette alors en une courbe simple c_n dans S, et $A_n = p^{-1}(c_n)$. La restriction de p définit un revêtement $W \cap \partial\overline{M} \to S$, qui induit une application $\mathcal{ML}(S) \to \mathcal{ML}\big(W \cap \partial\overline{M}\big)$ par considération de la préimage des laminations géodésiques mesurées. Comme le bord de $W \cap \partial\overline{M}$ est non-homotope à 0 dans $\partial\overline{M}$, l'inclusion induit aussi une application $\mathcal{ML}\big(W \cap \partial\overline{M}\big) \to \mathcal{ML}\big(\partial\overline{M}\big)$, et on peut définir la composition $p^*\colon \mathcal{ML}(S) \to$

$\mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ de ces deux applications. Si l'on considère c_n et ∂A_n comme des laminations géodésiques mesurées dans S et $\partial\overline{M}$, respectivement, alors $\partial A_n = p^*(c_n)$ par construction, et par conséquent $i(\alpha_n, p^*(c_n)) = 0$. Puisque l'espace $\mathcal{PML}(S)$ des laminations géodésiques mesurées projectives est compact on peut, quitte à passer à une sous-suite, supposer que les classes des courbes simples c_n convergent vers la classe d'une lamination géodésique mesurée γ dans $\mathcal{PML}(S)$. Par continuité du nombre d'intersection et de p^*, il s'ensuit que $i(\alpha, p^*(\gamma)) = 0$.

Nous utilisons maintenant l'hypothèse que $\overline{M}$ n'est pas un I–fibré sur une surface sans bord. Ceci entraîne que $\overline{M}$ est différent de W, et donc que le bord de la surface S est non-vide. En particulier, l'une des composantes S_1 de $S - \gamma$ n'est pas homéomorphe à un disque. Soit a une courbe simple dans S_1 qui est homotope à l'un des bouts de S_1. La courbe simple a n'est pas homotope à 0 dans S puisque S_1 n'est pas un disque, et l'anneau $A = p^{-1}(a)$ est essentiel dans $\overline{M}$ puisqu'il l'est dans W. De plus, par construction, a peut être homotopée à l'intérieur d'un voisinage arbitrairement petit de γ tout en restant disjointe de γ, et ∂A peut donc être homotopé à l'intérieur d'un voisinage arbitrairement petit de $p^*(\gamma)$ tout en restant disjoint de $p^*(\gamma)$. Puisque $i(\alpha, p^*(\gamma)) = 0$, on en déduit que $i(\alpha, \partial A) = 0$. Mais ceci contredit l'hypothèse 2 du théorème 26.

Puisque l'on a de nouveau atteint une contradiction, ceci montre que l'on peut supposer que tous les α_n satisfont les hypothèses du théorème 2. Ce résultat, démontré dans le paragraphe précédent, fournit alors une métrique géométriquement finie non-fuchsienne $m_n \in \mathcal{GF}(M)$ dont α_n est la lamination mesurée de plissage. Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le lemme de fermeture (proposition 8). Cette proposition fournit alors une métrique hyperbolique géométriquement finie non-fuchsienne $m \in \mathcal{GF}(M)$ dont $\alpha \in \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ est la lamination mesurée de plissage.

Ceci termine la démonstration du théorème 26. □

Théorème 27. *Soit $\overline{M}$ un I-fibré sur une surface compacte S sans bord et de caractéristique d'Euler négative, et soit $\alpha \in \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ une lamination géodésique mesurée telle que*:

1. *toute feuille fermée de α a un poids inférieur ou égal à π;*
2. *$i(\alpha, p^*(\gamma)) > 0$ pour toute lamination géodésique mesurée $\gamma \in \mathcal{ML}(S)$, où $p^*\colon \mathcal{ML}(S) \to \mathcal{ML}(\partial\overline{M})$ est l'application de préimage induite par la restriction $p\colon \partial\overline{M} \to S$ de la fibration.*

Alors il existe sur M une métrique hyperbolique géométriquement finie non-fuchsienne m dont α est la lamination mesurée de plissage.

Démonstration. La démonstration est la même que celle du théorème 26 à ceci près que la base S du I–fibré $W = \overline{M}$ est maintenant sans bord, de sorte que l'on ne peut nécessairement trouver une composante S_1 de $S - \gamma$ qui n'est pas un disque. Ceci explique pourquoi nous avons ici besoin d'une hypothèse 2 renforcée. □

Université de Californie Méridionale, Los Angeles, CA
E-mail address: fbonahon@math.usc.edu

École Normale Supérieure de Lyon et Université d'Orléans, France
E-mail address: jpotal@umpa.ens-lyon.fr

References

[AnC] J. W. Anderson and R. D. Canary, Algebraic limits of Kleinian groups which rearrange the pages of a book, *Invent. Math.* **126** (1996), 205–214.

[Be] L. Bers, Simultaneous uniformization, *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), 94–97.

[Bo1] F. Bonahon, Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, *Ann. of Math.* **124** (1986), 71–158.

[Bo2] ———, The geometry of Teichmüller space via geodesic currents, *Invent. Math.* **92** (1988), 139–162.

[Bo3] ———, Shearing hyperbolic surfaces, bending pleated surfaces, and the Thurston symplectic form, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **5** (1996), 233–297.

[Bo4] ———, Variations of the boundary geometry of 3-dimensional hyperbolic convex cores, *J. Differential Geom.* **50** (1998), 1–24.

[Br] M. Bridgeman, Average bending of convex pleated surfaces in hyperbolic three-space, *Invent. Math.* **132** (1998), 381–391.

[Ca] R. D. Canary, A covering theorem for hyperbolic 3-manifolds and its applications, *Topology* **35** (1996), 751–778.

[CEG] R. D. Canary, D. B. A. Epstein, and P. Green, Notes on notes of Thurston, in *Analytical and Geometrical aspects of Hyperbolic space* (D. B. A. Epstein, ed.) *London Math. Soc. Lecture Notes Series* **111** (1987), 3–92, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

[EpM] D. B. A. Epstein and A. Marden, Convex hulls in hyperbolic spaces, a theorem of Sullivan, and measured pleated surfaces, in *Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space* (D. B. A. Epstein, ed.) *London Math. Soc. Lecture Note Series* **111** (1986), 113–253, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

[Ha] W. Haken, Theorie der Normalflächen, *Acta Math.* **105** (1961), 245–375.

[HoK] C. D. Hodgson and S. P. Kerckhoff, Rigidity of hyperbolic cone-manifolds and hyperbolic Dehn surgery, *J. Differential Geom.* **48** (1998), 1–59.

[JaS] W. Jaco and P. B. Shalen, *Seifert Fibered Spaces in* 3*-manifolds*, *Memoirs Amer. Math. Soc.* **220**, A. M. S., Providence, RI, 1979.

[Joh] K. Johannson, *Homotopy Equivalences of* 3*-Manifolds with Boundary*, *Lecture Notes in Mathematics* **761** (1979), Springer-Verlag, New York.

[Jor] T. Jørgensen, On discrete groups of Möbius transformations, *Amer. J. Math.* **98** (1976), 739–749.

[KaT] Y. Kamishima and S. Tan, Deformation spaces of geometric structures, in *Aspects of Low-dimensional Manifolds* (Y. Matsumoto, S. Morita, eds.), *Advanced Studies in Pure Math.* **20**, Kinokuniya Company Ltd., Tokyo, Japan, 1992, 263–299.

[Ka] M. Kapovich, *Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups*, in *Progr. in Mathematics* **183**, Birkhaüser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.

[KeS] L. Keen and C. Series, Continuity of convex hull boundaries, *Pacific J. Math.* **168** (1995), 183–206.

[Le] C. Lecuire, Plissage des variétés hyperboliques de dimension 3, Prépublication (2002), École Normale Supérieure de Lyon.

[Mor] J. Morgan, Group actions on trees and compactifications of the space of classes of $\mathrm{SO}(n,1)$-representations, *Topology* **25** (1986), 1–33.

[MoS] J. Morgan and P. Shalen, Degenerations of hyperbolic structures III: actions of 3-manifolds groups on trees and Thurston's compactness theorem, *Ann. of Math.* **127** (1988), 457–519.

[MoS] G. D. Mostow, *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*, *Ann. Math. Studies* **78** (1973), Princeton Univ. Press.

[Ot1] J.-P. Otal, Sur le cœur convexe d'une variété hyperbolique de dimension 3, prépublication (1994).

[Ot2] ———, Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3, *Astérisque* **235** (1996).

[Ot3] ———, Thurston's hyperbolization of Haken manifolds, in *Surveys in Differential Geometry* **III**, 77–194 Internat. Press, Boston, MA, 1998.

[Ri] I. Rivin, A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space, *Ann. of Math.* **143** (1996), 51–70.

[RiH] I. Rivin and C. D. Hodgson, A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space, *Invent. Math.* **111** (1993), 77–111; Corrigendum, *Invent. Math.* **117** (1994), 359.

[Ro] C. Rourke, Convex ruled surfaces, in *Analytical and Geometrical Aspects of Hyperbolic Space* (D. B. A. Epstein, ed.), *London Math. Soc. Lecture Notes Series* **111**, 255–272, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1987.

[Sk] R. Skora, Splittings of surfaces, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 605–616.

[Th1] W. P. Thurston, *The Topology and Geometry of* 3-*Manifolds*, Notes de cours, Université de Princeton, 1976–79.

[Th2] ———, Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1982), 357–381.

[Th3] ———, Hyperbolic structures on 3-manifolds, I: Deformation of acylindrical manifolds, *Ann. of Math.* **124** (1986), 203–246.

[Th4] ———, Hyperbolic structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle, manuscrit non publié, 1980.

[Th5] ———, Hyperbolic structures on 3-manifolds, III: Deformations of 3-manifolds with incompressible boundary, manuscrit non publié, 1986.

[To] J. L. Tollefson, Involutions of sufficiently large 3-manifolds, *Topology* **20** (1981), 323–352.

[Wa] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math.* **87** (1968), 56–88.

(Received May 9, 2001)
(Revised March 25, 2003)